Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

七則演算論とゼロ除算

数学における基本的な演算操作には，加算，減算，乗算，除算の所謂四則（演）算がある．言うまでもなく，加算は足し算，減算は引き算，乗算は掛け算，除算は割り算を意味している．これらの演算の間には，言うまでもなく一定の関係性が在る．しかしながら，或る意味で更に基本を成す，自然数を導出する公理系が設定された Peano 公理でさえ，単位元である 1 は無定義用語として登場し，1 の実在性や導出には触れられていない．

そこで，先ず，本論では，集合を起点とし，存在算を定義して，零元と単位元を導出的に規定することを以て出発点として，その後，他の六つの演算を導出的に定義することでそれらの関係性を明らかにすると共に，数学における基本的な演算体系を再構築する．

§１．第一演算　～存在算～

任意の集合 A を考える．この集合 A の世界の中において，集合 A が如何程の大きさ（基数）なのかを考えるとき，或いは他の集合 B との間に，それらの大きさを比較しようとするとき，如何にすれば，それは実現されるのか．その根本的なアプローチとしては，集合 A の大きさを数概念に置き換えて捉えるということが挙げられ，また，その方法が必要となると言えるが，それは如何にして可能となるのか．そこで，集合 A に対して，次の演算を定義して，それらへのアプローチの道を拓いてゆこう．

集合 A に対して，その基数を $|A|$ と表記し，

$$\frac{|A|}{|A|} \qquad (1)$$

を，原始自己存在比と名付け，この演算（一連の操作）を存在算と名付けるものとする．つまり，或る集合 A の（基数 $|A|$ の）自身の比を考えるのである．勿論，ここで，(1)式において，基数 $|A|$ の値は不明でも構わない．しかし，こうすることで，未だ大きさの不明な世界（集合）において，自身を尺度の基準として，世界（集合自身）を測るのである．

さて，存在算の結果，原始自己存在比はどのような値となるのか．これを次に見て行くこととする．そこで，先ず，最小集合を考える．言うまでもなく，最小の集合とは，何も無いという集合である．即ち，それは空集合$\{\}$である．これは，

$$\emptyset = \{\ \ \} \qquad (2)$$

と表記される．ここで，集合 $A=\emptyset$とすると，これを(1)式に当て嵌めたなら，

$$\frac{|A|}{|A|} = \frac{|\emptyset|}{|\emptyset|} = \frac{|\{\ \ \}|}{|\{\ \ \}|} \qquad (3)$$

である．ここで，(3)式で与えられる原始自己存在比もまた集合（の要素）であると考えると，

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

$$\left\{\frac{|A|}{|A|}\right\} = \left\{\frac{|\emptyset|}{|\emptyset|}\right\} = \left\{\frac{|\{\quad\}|}{|\{\quad\}|}\right\} \qquad (4)$$

であるが，これは何も存在しないモノ自身を比べている比較，即ち比であるから，やはり何も存在しないと考えるのが自然である．そこで，これを，

$$\left\{\frac{|\emptyset|}{|\emptyset|}\right\} \equiv \emptyset \qquad (5)$$

と定義する．この定義の確からしさは，後に判明する．さて，ここで，(5)式の両辺の基数をとって，

$$|\emptyset| = \left|\left\{\frac{|\emptyset|}{|\emptyset|}\right\}\right| \equiv 0 \qquad (6)$$

とする．これより，直ちに，空集合$\emptyset$の基数$|\emptyset|$は，

$$|\emptyset| = 0 \qquad (7)$$

となる．すると，(7)式を(6)式に代入して(2)式の関係を用いると，

$$|\{\quad\}| = |\emptyset| = \left|\left\{\frac{|\emptyset|}{|\emptyset|}\right\}\right| = \left|\left\{\frac{0}{0}\right\}\right| = 0$$

$$|\{\quad\}| = \left|\left\{\frac{0}{0}\right\}\right| = 0$$

$$\therefore \quad \frac{0}{0} = 0 \qquad (8)$$

が導かれる．つまり，最小の集合 $A_{\min}$ である空集合$\emptyset$に対して原始自己存在比を考え，存在算を施すことで，この集合 $A_{\min}$ の零元が導かれたことになる．

次に，非空集合$\bar{\emptyset}$を考える．即ち，$\bar{\emptyset} \neq \emptyset$である．特に，集合 A を有限集合として考えると，より考え易いであろう．（勿論，有限集合に限定する必要はないといってよい．）そこで，集合 $A = \bar{\emptyset}_A$ として，(1)式に当て嵌めると，

$$\frac{|A|}{|A|} = \frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|} \qquad (9)$$

である．これは，空でない集合自身の比であるから，この比は存在すると考えるのが自然であろう．そこで，(9)式で与えられる原始自己存在比もまた集合（の要素）であると考えられ，それは，

$$\left\{\frac{|A|}{|A|}\right\} = \left\{\frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\} \qquad (10)$$

であって，　どんな集合も空を含むとして，

$$\left\{\frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\} \equiv \left\{\emptyset,\ \frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\} \neq \emptyset \qquad (11)$$

と定義すると，(7)式を用いて，

$$\left|\left\{\frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\}\right| = \left|\left\{\emptyset,\ \frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\}\right| > |\emptyset| = 0 \qquad (12)$$

が成り立ち，自身 1 つ分に相当することを勘案して，

$$\left|\left\{\frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\}\right| = \frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|} \equiv 1 > 0 \qquad (13)$$

又は，

$$\left|\left\{\emptyset,\ \frac{|\bar{\emptyset}_A|}{|\bar{\emptyset}_A|}\right\}\right| = 0 + 1 \qquad (14)$$

と定義する．勿論，(12)式より，

$$1 = 0 + 1 \qquad (15)$$

が成り立つ．かくして，集合 A の世界の中に，零元と単位元を得た．ところで，(14)式右辺の演算子＋が定義無しに出現したが, 現段階ではこの定義は特に必要ない. 先ずは(13)式（若しくは(14)式）の導出がここでの目標地点であったからである．即ち，空でない集合の原始自己存在比を考え，これに対して存在算を施すことによって，一般の非空集合$\bar{\emptyset}$における単位元を得るということこそがここでの目標だったのである．なお，原始自己存在比によって零元と単位元の何れも生じるということであるから，原始自己存在比は根元という名の元であると言ってもよいであろう．

さて，ここまでの展開によって我々の数学は，零元と単位元を得たのであるから二進数を得たといってもよく，また，Giuseppe Peano による Peano 公理を適用すれば，如何なる自然数も生成可能となったのであり，その意味では，あとは四則演算を定義出来れば，あらゆる演算が可能となると共に、あらゆる数学的関係性を追求することが可能となったと言ってもよいであろう．

しかしながら本論では，演算の関係性を明らかにすることも目的としているのであり，自然なる順を追ってその追求するものとしよう．そこで，以下に，以上までの延長としての自然なカタチで生じる演算達をみてゆくこととしよう．

§２．第一演算（存在算）　～集合 A 自身の大きさを測る～

さて，与えられた集合 A は如何なる大きさを持つのであろうか．それは如何にして計測可能であろうか．§１．において，集合 A の原始自己存在比を用いて零元 0 と単位元 1 を導いた．しからば，これらの要素のみを用いて，集合 A 自身の大きさを測ることが可能なのであろうか．それを以下に見る．

集合 A 自身の大きさを測るに当たって，先ずは，集合 A の基数 $|A|_0$ から原始自己存在比 $|A|/|A|$を減じたとき，その差 $|A|_1$ が,

$$0 \le |A|_1 = |A|_0 - \frac{|A|}{|A|} < |A|_0 \qquad (16)$$

を満たすとき，可減の原始自己存在比集合$\{|A|/|A|\}_1$を生成し，(16)式を満たさないとき，可減の原始自己存在比集合として空集合{ }を生成するものとする．

更に，$|A|_1$から原始自己存在比$|A|/|A|$を減じたとき，その差$|A|_2$が，

$$0 \leq |A|_2 = |A|_1 - \frac{|A|}{|A|} < |A|_1 \qquad (17)$$

を満たすとき，可減の原始自己存在比集合$\{|A|/|A|\}_2$を生成し，(17)式を満たさないとき，可減の原始自己存在比集合として空集合{ }を生成するものとする．

更に，$|A|_2$から原始自己存在比$|A|/|A|$を減じたとき，その差$|A|_3$が，

$$0 \leq |A|_3 = |A|_2 - \frac{|A|}{|A|} < |A|_2 \qquad (18)$$

を満たすとき，可減の原始自己存在比集合$\{|A|/|A|\}_3$を生成し，(18)式を満たさないとき，可減の原始自己存在比集合として空集合{ }を生成するものとする．

以下同様にして，$|A|_{j-1}$から原始自己存在比$|A|/|A|$を減じたとき，その差$|A|_j$が，

$$0 \leq |A|_j = |A|_{j-1} - \frac{|A|}{|A|} < |A|_{j-1} \qquad (19)$$

を満たすとき，可減の原始自己存在比集合$\{|A|/|A|\}_j$を生成し，(19)式を満たさないとき，可減の原始自己存在比集合として空集合{ }を生成するものとして，同様の操作を無数に繰り返すものとする（実際には，$j=|A|$までは可減の原始自己存在比集合は，非空集合となり，それ以後は，全て空集合となる．）．

次に，これら可減の原始自己存在比集合を要素とする集合，即ち，集合の集合，可減原始自己存在比集合集合A^*を考える．

このとき，その基数$|A^*|$について，

$$|A| = |A^*| \qquad (20)$$

が成り立つ．

なぜならば，

$$A^* = \left\{ \{\ \},\ \left\{\frac{|A|}{|A|}\right\}_1,\ \left\{\frac{|A|}{|A|}\right\}_2,\ \cdot\cdot\cdot,\left\{\frac{|A|}{|A|}\right\}_{|A|},\ \{\ \},\ \{\ \},\ \cdot\cdot\cdot \right\} \qquad (21)$$

であるから，

$$\begin{aligned} |A^*| &= \left| \left\{ \{\ \},\ \left\{\frac{|A|}{|A|}\right\}_1,\ \left\{\frac{|A|}{|A|}\right\}_2,\ \cdot\cdot\cdot,\left\{\frac{|A|}{|A|}\right\}_{|A|},\ \{\ \},\ \{\ \},\ \cdot\cdot\cdot \right\} \right| \\ &= 0 \underbrace{+1+1+\ \cdot\cdot\cdot+1}_{|A|\ \text{回加}} +0+0\cdot\cdot\cdot \\ &= 0 + |A| \end{aligned} \qquad (22)$$

を得る．これは，

$$|A| = 0 + \underbrace{\frac{|A|}{|A|} + \frac{|A|}{|A|} + \cdots + \frac{|A|}{|A|}}_{|A|\ 回加} \qquad (23)$$

と表記でき，また，

$$|A| = \frac{|A|}{|A|} \times |A| \qquad (24)$$

という形式を定義すべきであることを示唆している．これについては，後述するものとするが，ここで重要なことは，(16)式から(24)式一連が存在算の系であるということである．そして，存在算は，集合 A に対してその基数 $|A|$ を考え，自身の比，即ち原始自己存在比 $|A|/|A|$ をとることから出発して，零元 0 と単位元 1 を生成し，更に，それらを用いて，自身の大きさを測るために，基数 $|A|$ に対する原始自己存在比 $|A|/|A|$ の繰り返し減算を施して可減原始自己存在比集合集合を生成して，その基数を求めるという順を追った．こうして，集合 A の大きさを測る手立てを得たのである．そしてその過程で，1 の繰り返し加算が生じた．つまり，減算に対応して加算が生じたのであり，繰り返しであることから単位元（又は零元）に対する乗算が生じた．

ここで，集合 A の大きさ（基数）が，小数である場合，10 進法を用いて(16)式から(19)式に示す一連の演算操作を実行する場合には，小数領域に入って以後は，残数（小数部分）を 10 倍して小数第 1 位に対して原始自己存在比 $|A|/|A|$ を減じる操作を，可減の原始自己存在比集合 $\{|A|/|A|\}_k$ が空集合となるところまで繰り返して，それら小数第 1 位相当の可減の原始自己存在比集合 $\{|A|/|A|\}_k$ の基数和の 1/10 倍を小数第 1 位の値とし，小数第 2 位の場合には，小数第 1 位における 10 倍と 1/10 倍を，それぞれ 100 倍と 1/100 倍とし，以下同様に小数第 N 位においては，10^N 倍と $1/10^N$ 倍することで，小数点以下の値をいくらでも精緻化することができる．

§３．第一演算　～数としての存在算～

§２において，零元と単位元，そして数体系が定義づけられたので，ここでは存在算を数として定義づけるものとする．先に，集合の大きさ（基数）として，存在算が定義されているので，任意の数 a に対しても原始自己存在比は，

$$\frac{a}{a} \qquad (25)$$

と定義される．この演算の体系として，存在算が規定される．勿論，この値は，

$$\frac{a}{a} = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ 1 & (a \neq 0) \end{cases} \qquad (26)$$

である．これより，$a \neq 0 \wedge b \neq 0$ ならば，

$$\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=1 \qquad (27)$$

が成り立つ．

さて，先ず，どのような場合にもゼロが存在する．これは，何も無いという状態（これに対応した数概念を 0 とする．）が常に基本にあり，その上でしか，有るという状態が存在しないと言える．即ち，どんなときも

$$0 \qquad (28)$$

が基礎に在ることになるのである．そしてそれは，原始自己存在比として，

$$\frac{0}{0}=0 \qquad (29)$$

と表記される．すると，或る数 $a \neq 0$ が存在するというのは，一体どのような数学的構造を有することなのかを明らかにしておくと，後の演算の本質を検討する上で補助的な役割を果たしてくれるであろう．つまり，a が存在するとは，

$$0+\frac{a}{a}\times a=0+a \qquad (30)$$

なのであり，これは，

$$0+a\underbrace{-\frac{a}{a}-\frac{a}{a}-\cdots-\frac{a}{a}}_{a\text{回減}}=0 \qquad (31)$$

$$0+a-\frac{a}{a}\times a=0 \qquad (32)$$

であって，(32)式の両辺に，$-(a/a)\times a$ を加えると，(30)式が得られる．以上より，a が存在するとは，0 に対して a を 1 回加え合わせることに相当し，

$$0+a \qquad (33)$$

と表されると言える．これは，現代数学では略記してよいこととして，

$$a \qquad (34)$$

と表されるが，本質的には(33)式が前提となっているということに対する注意が必要である．そこで，本論では，意図的に(33)式の形態を大抵の場合に採ることとし，これら(1)～(33)式の一連の形式の演算を存在算と名付けるものとする．

§４．第二演算　～加算～

存在算に次ぐ演算は，減算であると言える．何故なら，先に，存在算に係る一連の演算操作を実行するに当たって，原始自己存在比こそが最も本質的であり，発生学的重要性を以て大きな役割を果たし，その結果，零元 0 と単位元 1 が生成されることを見た．更に，原始自己存在比によって，自身の大きさを測り知ることが可能となった訳であるが，そこで必要性が生じたのは減算であった．つまり，或る数の大きさを知る上で重要な演算は，

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

従来的な四則演算の中でも減算であることが判った．このことから第二演算とは，減算のことであると言って過言でない．しかしながら，ここでは，論理展開の都合上，第二演算は加算であるものとして，論述して行くこととしよう．

さて，存在算を定義するに当たって，(30)～(33)式において特別な加算を使用した．つまり，それは，或る数 a が存在するとは，何も無い 0 状態に対して，a を 1 回加えた状態であるという基礎的且つ特殊な加算であって，これを（含めて一連の操作を）存在算と呼ぶこととした．そこで，次に，存在算を拡張して，足し算（加算）を定義する．

加算とは，何も無い状態に対して，２つの数どうしを加え合わせる（足し合わせる＝足し算）操作を意味する演算のことである．厳密には，加算とは，何も無い状態 0 に在る或る数 a に対して或る数 b を 1 回加え合わせる操作を行う演算をいう．つまり，

$$0+\frac{a}{a}\cdot a+\frac{b}{b}\cdot b \qquad (35)$$

と表記される（$0+(a/a)\cdot a+b$ としてもよい.）．ここに，・は積（乗算）の演算子であり，以下同様とする．これは，現代数学では，$a+b$ と略記される．ところで，略記には，記述労力の省略や見通しの向上というメリットがある反面，本質を見失うということ，特に，時代を経ると更に本質を見失う傾向が強くなるというデメリットが存在することに対する注意がもっと払われるべきであろう．

§５．第三演算　～減算～

第二演算における操作を加算操作ということにすると，この加算操作の逆の操作は，１つの或る数から１つの或る数を減じる（引く）操作ということになり，これを減算操作という．厳密には，減算とは，何も無い状態 0 に在る或る数 a から或る数 b を 1 回減じる操作を行う演算をいう．表記は，

$$0+\frac{a}{a}\cdot a-b \qquad (36)$$

であり，また，$0+(a/a)\cdot a-(b/b)\cdot b$ としてもよいが，何れもこれらは，現代数学では，$a-b$ と略記される．さて，この意味では，減算とは，必ずしも加算を出発点としなければ定義することが出来ないと言うものではなく，存在算を基にして，加算に対して独立に定義することが可能であるといえる．そして，加算操作と減算操作とは，1 対 1 に対応した完全に逆演算関係が成立するということができ，それゆえに，加算と減算とは完全逆演算関係にあるといえる．しかしながら，この逆演算関係は必ずしも一般には成り立つものではないことに注意が必要である．

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

§６．完全逆演算関係

ここで，完全逆演算関係について，以下に，定義をしておこう．

定義：或る演算Ａにおいて有り得る全ての演算結果が、別の演算Ｂにおいて有り得る全ての演算結果との間に１対１の逆演算関係が成立するとき，これらの演算Ａ｜Ｂ間には，完全逆演算関係が成り立つという．

§７．第四演算　～乗算～

次に，加算を出発点として，乗算を，加算操作を用いて導出的に定義する．即ち，乗算とは，何も無い状態 0 に対して或る数 a を b 回加え合わせる（乗せ合わせる）操作を行う演算のことであると言える．言い換えれば，繰り返し加算操作を乗算と定義するのである．この意味で，乗算は加算に基礎を置くものであり，それ無しには正確には実現されないと言える．表記は，

$$\underbrace{0+\frac{a}{a}\cdot a+\frac{a}{a}\cdot a+\cdots+\frac{a}{a}\cdot a}_{b\text{回加}} \equiv 0+\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)\times b \qquad (37)$$

であって，左辺は乗算（繰り返し加算），右辺は掛け算を意味する表記であるとして，呼称を区別するものとする．ここで，両辺の a/a は，原始自己存在比であって，掛け算とは原始自己存在比 a/a に対して或る数 a を乗じた数を b 倍する操作を行う演算のことであると言える．なお、原始自己存在比 a/a とは，比，若しくは，除算の形式を採るものであるから，厳密には，除算無しに加算や乗算を独立に定義することはできないと言える．勿論，原始自己存在比や存在算自体も除算形式で定義されているのであるから存在算の形式と除算との間に矛盾があってはならないといえる．

§８．第五演算　～除算（割り算）～

そこで，掛け算（乗算ではなく）を出発点として，その逆演算操作を用いて，割り算（除算ではなく）を導出的に定義することを考える．つまり，２つの数 a，b に対して掛け算操作を行った結果の値を c とするとき，これを $a\times b=c$ と表記するものとし，この関係に対して $c\div b=a$ が成り立つとき，これを割り算ということにするのである．勿論，乗算関係 $a\times b=c$ において，$a\neq 0$，$b=0$ とすると，$c=0$ であるが，これを割り算 $c\div b=a$ に当て嵌めると，$a_1\neq a_2$ として $a_1\times 0=0$ と $a_2\times 0=0$ であるから $0\div 0=a_1$，$0\div 0=a_2$ となり，従って $a_1=0\div 0=a_2$ であるから $a_1=a_2$ が成り立つことになって仮定に反し，不合理となる．このことから掛け算の逆演算操作による割り算の定義によれば，ゼロで割ることが出来ないということがカタチ作られる．

このことは，形式論的な逆演算操作による新たな演算の導出的定義を行うと，逆演算の完全性が得られる保証が無くなることを示唆している．それどころか，演算自体に例外的

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

演算が発生することになるのである．つまり，形式論的には，必ずしも逆の操作が成り立たないことが出てくると言うことである．これは、本来独立，個々に原理的に定義されるべき演算どうしにおいて，逆演算操作が部分的に成立する事実に着目して，逆演算操作が成立する部分だけを以てあたかも全体であるかの如くに規定することにより，狭義の定義になってしまうのであり，形式論的逆演算操作による演算定義の不完全性を誘発するものであるといえる．

ところが，乗算の逆の操作，即ち、或る数 a から或る数 b を何回減じることが出来るかということによって，原理的に除算を定義することが可能であり，この場合，ゼロ除算が可能となる．つまり，この定義では，各回 b を減じた結果の値が減じる直前の値に対して変化を伴う減算操作を繰り返した結果が非負最小値（剰余 $d \mid 0 \leqq d \leqq a$）となるところまでの減算回数を商 c とするのである．（なお，剰余項 r は，適当な倍率を設定することで適宜の桁（小数点以下）まで繰り返し減算操作を実行して，商の小数点以下の桁を増加させて精緻化表記を採ることも可能である．）これは，

$$0+\frac{a}{a}\cdot a\underbrace{-b-b-\cdots-b}_{c\text{回減}}=0+d \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a}\cdot a\right)\div b=c\cdots d \qquad (38)$$

と表記される．これの定義によれば，例えば，a＝0 且つ b＝0 のとき，　0÷0＝0…0 が成り立つのである．なぜならば，

$$0\div 0=0\cdots 0 \Leftrightarrow 0-0=0+0 \qquad (39)$$

であり，矢印の右側の左辺は何も無いという状態 0 から 0 を減じること，即ち何も引かないことを意味し，右辺はその際の差が変化しないので，変化した回数は 0，即ち，商は 0 となることを意味している．勿論，剰余も 0 であるから(39)式が成り立つといえる．更に，驚くべきことに，$a\neq 0 \wedge b=0 \Rightarrow a/0=0\cdots a$ であり，どんな数でも 0 で割れば，商は 0 であると述べている．勿論，ゼロ除算に関する歴史は古く，有名どころでは，Leonhard Euler がその著書『無限解析』において, 無限大になることを明示している他に, Niels Abel や Bernhard Riemann がやはり，1/0＝∞であると示していることからしても，ゼロ除算の強力な不連続性が，歴々の天才数学者達にとっても如何に想像を絶するものであったかを強く物語っていると言えよう．

さて，話を戻すと，以上からも判るとおり，除算は（存在算と）減算に基礎を置くものであり，加算や乗算の系統とは独立に定義可能であると言える．

ところで，この(38)式の最左辺を，

$$0+\frac{a}{a}\cdot a-\left(\underbrace{b+b+\cdots+b}_{c\text{回加}}\right)-d=0+\frac{a}{a}\cdot a-\left(0\underbrace{+b+b+\cdots+b}_{c\text{回加}}\right)-d=0 \qquad (40)$$

と変形すると，この中辺の括弧内は，何も無い状態 0 に対して b を c 回加え合わせたモノであるから，存在算を加味すれば，乗算の定義より，

$$0+\frac{a}{a}\cdot a-\left(\underbrace{0+\frac{b}{b}\cdot b+\frac{b}{b}\cdot b+\cdots+\frac{b}{b}\cdot b}_{c\text{回加}}\right)-d=0+\frac{a}{a}\cdot a-\left(\frac{b}{b}\cdot b\right)\times c-d=0 \qquad (41)$$

この中辺と右辺の関係からは,

$$0+\frac{a}{a}\cdot a=0+\left(\frac{b}{b}\cdot b\right)\times c+d \qquad (42)$$

を得るので，現代数学風に略記すると,

$$a=b\times c+d \qquad (43)$$

更に，掛け算記号を略記すると,

$$a=bc+d \qquad (44)$$

となることが判明する．これは，b（或いは c）の一次方程式であると観ることも可能であろう．つまり，これが，除算の逆演算として成立する正しい形式（加算の項を有する乗算，即ち，加乗算）である．ここで，(44)式において，$a\neq0$ 且つ $b=0$ としたとき，c はあたかもどのような値でも採り得るかのように，形式論的には見受けられる．しかしながら，原理はあくまでも上述の除算の定義にあるのであって，ここでの c はあくまでも $c=0$ に限られ, 同時に, この場合の剰余 d は $d=a$ となるのである. 上述の除算の定義は, 除算の解（商）が一意的に定まることを原理として，(44)式の代数を確定せしめていると言えるのであり,「解無し」や「不定」,「定義されない（定義出来ない)」や「無限大」なる不明瞭さを排除していると言える.

§９．第五演算　～除算（割り算）と分数～

ところで，割り算（除算）には，類似概念として分数が在る．これら割り算と分数とは一体どのような関係性が有るのかを一考しておくのは，複合演算問題を考える上で有効である．そこで，この関係について以下に検討する.

一般に,

$$a\div b\equiv\frac{a}{b} \qquad (45)$$

と同値関係を定義して使用されることが多い．しかしながらこれは本当に同値なのだろうか？結論から言って，一般には同値であると言えず，またそれぞれ意味が異なっており，表記法による制約をしっかりと定義しないと矛盾が生じることになる．がここでは，左辺が指し示すものの意味を述べよう．(45)式の左辺が指し示すものは,

「$a\div b$ は，或る数 a から或る数 b を何回減じることが出来るか？を問うており，そしてこれを除算（割り算）と呼び，当式のように略記するものである.」

これに対して，(45)式の右辺は,

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

「分数は、分線で区切られた上下に記される２つの数 a，b の比であって，これらの２数によって，１つの数の大きさを表現しているのである．」

従って，分数の場合は，比の値が変わらない限り、約分可能であって、約分前後は同値として扱うことが可能とされる．その結果、例えば，出発分数を，

$$\frac{a}{b} \qquad (46)$$

とし，$k \neq 0$，１として，

$$a = kA \qquad (47)$$

$$b = kB \qquad (48)$$

であるとき，

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} \qquad (49)$$

が成り立ち，同値関係を成立させつつ，出発分数とは異なる分数に至ることが有り得る．
ところが，除算（割り算）の場合には，$a \div b$ の商を c，剰余を $d\ > 0$ とすると，先ず，

$$a \div b = c \cdots d \qquad (50)$$

これは，加乗算形式で，

$$a = bc + d \qquad (51)$$

と表される．ここで，$a = kA$と，$b = kB$をそれぞれ代入して，両辺を k で除すると，

$$A = Bc + \frac{d}{k} \qquad (52)$$

これを元の除算（割り算）表記に直すと，

$$A \div B = c \cdots \frac{d}{k} \qquad (53)$$

となって，除算（割り算）においては，除数と被除数との間に共通因数が有るからと言って，必ずしも約分できる訳ではなく，商が一致するものの，剰余が不一致となり得ることが示され，除算においては必ずしも同値関係が成り立つ訳ではないと言える．
以上のとおり，割り算と分数とが必ずしも同値関係が成り立つ訳ではないのであるから等式扱いする場合には注意を要する．しかしながら，これらの検討は，剰余項を問題としない場合，即ち，剰余形式を採らない場合には，

$$a \div b = \frac{a}{b} \qquad (54)$$

または，原始自己存在比を用いて厳密表記をすれば，(54)式は，

$$\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) \div b = \frac{\frac{a}{a} \cdot a}{b} = \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{a \cdot b} \qquad (55)$$

となる．つまり，(54)式の関係が成り立つとしてよいことを意味している．このことから，

$$0 \div 0 = \frac{0}{0} = 0 \qquad (56)$$

が成り立つと言ってよい．従って，a＝0 の場合における原始自己存在比 a/a は，0/0＝0 となる．

§１０．第六演算　～冪乗算（指数算）～

次に，乗算を出発点として，冪乗算を，乗算操作を用いて導出的に定義する．即ち，冪乗算とは，或る数 a に対する原始自己存在比 a/a に対して，a を b 回乗じる操作を行う演算のことであると言える．言い換えれば，原始自己存在比に対する繰り返しの乗算操作を冪乗算と定義するのである．この意味で，冪乗算は乗算に基礎を置くものであり，更には加算に基礎を置くものであって，乗算，加算無しには正確には実現されないと言える．

表記は，

$$\frac{a}{a}\underbrace{\times a \times a \times \cdots \times a}_{b\text{回乗}} \equiv a^b \qquad (57)$$

であって，左辺は冪乗算（繰り返し乗算），右辺は指数算（指数形式）を意味する表記であるとして，呼称を区別するものとする．ここで，左辺の a/a は，勿論，存在算を意味する原始自己存在比であり，右辺の指数算とは，或る数 a を b 乗する操作を行う演算のことであると言える．なお，原始自己存在比 a/a は，$a \neq 0 \Rightarrow a/a = 1$，$a = 0 \Rightarrow a/a = 0$ となる．従って，$a \neq 0$ 且つ b＝0 の場合，原始自己存在比 a/a=1 に対して a を 0 回乗じるのであるから，原始自己存在比 a/a=1 に対して何も乗じていないということになって，解は 1 となる．
つまり，(57)式の左辺は，

$$\frac{a}{a}\underbrace{\qquad}_{0\text{ 回乗}} = 1 \quad (a \neq 0) \qquad (58)$$

であって，即ち，(57)式は，

$$\frac{a}{a} = a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \qquad (59)$$

となる．次に，a＝0 且つ $b \geqq 0$ の場合を考えると，

$$\frac{a}{a}\underbrace{\times a \times a \times \cdots \times a}_{b\text{回乗}} = a^b \qquad (60)$$

において，a＝0 であるから，これを(52)式に代入すると，

$$\frac{0}{0}\underbrace{\times 0 \times 0 \times \cdots \times 0}_{b\text{回乗}} = 0^b \qquad (61)$$

であり，左辺は，$b \neq 0$ ならば，(56)式より，0/0＝0 であるから，

$$\frac{0}{0} \times 0 = 0 \times 0 = 0 \qquad (62)$$

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

であるから，

$$0^b = 0 \quad (b \neq 0) \qquad (63)$$

が成り立つ．特に，b＝0 ならば，原始自己存在比 a/a に対して，a を乗じる回数は 0 になるので，(61)式の左辺は，

$$\frac{0}{0}\underbrace{\qquad}_{0\text{回乗}} = 0 \qquad (64)$$

となる．即ち，(61)式の右辺の形式を合わせて，

$$0^0 = 0 \qquad (65)$$

が成り立つと言える．これに関し，Leonhard Euler が彼の著書「無限解析」の中で，0^0＝1 であるとして，数の体系構築に関する根本的なところで，間違いを犯していることからしても，(65)式の結果は，驚くべき結果，驚くべき事実であると言えるであろう．

§１１．第七演算　～冪逆乗算～

或る非負実数 a を底とし，底 a の存在性を表す原始自己存在比 a/a に対して非負実数たる準真数$(b/b)\cdot b$ を乗じて成る$(a/a)\times(b/b)\cdot b$ を真数 B とするとき，真数 $B=(a/a)\times(b/b)\cdot b$ に対して底 a の逆数 a^{-1} を乗じた際に，その積$\{(a/a)\times(b/b)\cdot b\}\times a^{-1}$が，$(a/a)\times(b/b)\cdot b\neq\{(a/a)\times(b/b)\cdot b\}\times a^{-1}$ を満たす乗算を行う演算，そしてこの演算操作を何回繰り返し行うことが出来るかを問う演算を冪逆乗算という．つまり，表記は，

$$\left(\frac{b}{b}\cdot b\right)\times\left(\frac{a}{a}\underbrace{\times a\times a\times\cdots\times a}_{c\text{回乗}}\times a^{\theta}\right)^{-1} = \begin{cases} 0 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}=0\right) \\ 1 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\neq 0\right)\end{cases} \quad (0\leq\theta<1) \qquad (66)$$

となる．ここに，$\times a^{\theta}$ は剰余乗である．これについては，後述する．また，(66)式は，

$$\left(\frac{b}{b}\cdot b\right)\times\left(\frac{a}{a}\right)^{-1}\underbrace{\times a^{-1}\times a^{-1}\times\cdots\times a^{-1}}_{c\text{回逆乗}}\times a^{-\theta} = \begin{cases} 0 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}=0\right) \\ 1 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\neq 0\right)\end{cases} \quad (0\leq\theta<1) \qquad (67)$$

となる．

§１２．第七演算　～一般逆数～

さて， (67)式左辺に，$(a/a)^{-1}$ なる原始自己存在比 a/a の逆数が生じたので，ここで逆数を定義しておくこととする．

定義　逆数とは，分数表記した際の分母と分子の値を入れ換えた分数，並びに，その約分値を言う．或いは，元の分数の－1 乗の分数，並びに，その約分値を言う．

従って，或る数 α，或る数 β について，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\gamma \qquad (68)$$

のとき，逆数は,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\gamma^{-1} \qquad (69)$$

であり，$\alpha=\beta$ の場合，(68)式は,

$$\frac{\alpha}{\alpha}=\gamma \qquad (70)$$

であって，(69)式は,

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{-1}=\gamma^{-1} \qquad (71)$$

であり，定義から

$$\gamma=\frac{\alpha}{\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{-1}=\gamma^{-1} \qquad (72)$$

を得る．ゆえに,

$$\gamma=\gamma^{-1} \quad (\alpha=\beta) \qquad (73)$$

が成り立つ．この γ の値は，$\alpha=\beta$ の値によって次の二値をとり得て,

$$0=0^{-1} \quad (\alpha=\beta=0) \qquad (74)$$

$$1=1^{-1} \quad (\alpha\neq 0\wedge\alpha=\beta) \qquad (75)$$

となる．この結果は，0 の逆数，即ち 0^{-1} は，1/0 ではなく，0 に限ることを意味している．また，$\alpha/\beta=(\alpha/\beta)^1$ 並びに $\gamma=\gamma^1$ を勘案して，(68)式と(69)式の辺々の積をとると,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1}\times\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\gamma^{1}\times\gamma^{-1} \qquad (76)$$

であるから(76)式左辺の指数算を行うと,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1}\times\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1-1}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0} \qquad (77)$$

であるから,

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0} \qquad (78)$$

または,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0}\frac{\beta}{\alpha} \qquad (79)$$

を得る．この(78)，(79)式は，正に，逆数のより厳密な定義式であり，逆数の自然な拡張になっていると言ってよい．つまり，(78)式及び(79)式は一般逆数の定義式であると言える．

従って，或る数 α と或る数 β について，α/β の逆数，即ち $(\alpha/\beta)^{-1}$ は，(79)式を満たし，従

って，α 又は β の少なくとも何れか一方が 0 のとき，(56)式並びに(65)式から，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = \left(\frac{0}{\beta}\right)^0 = 0^0 = 0 \qquad (80)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = \left(\frac{\alpha}{0}\right)^0 = 0^0 = 0 \qquad (81)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = \left(\frac{0}{0}\right)^0 = 0^0 = 0 \qquad (82)$$

を得，その逆数は 0 に限られることを示している．なお，(81)式の関係は，$a \neq 0$ のとき，代数学的には，

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{0} \cdot 1 = \frac{a}{0} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \times b}{0 \times b} = \frac{b \times a}{0} = b \cdot \frac{a}{0} \quad (b \neq 0{,}1) \qquad (83)$$

これより，

$$\frac{a}{0} = \frac{0}{b-1} = 0 \qquad (84)$$

を得，ゆえに，

$$\frac{a}{0} = 0 \qquad (85)$$

が成り立つ（ただし，分数と除算の相異点には注意が必要である．）．従って，α 又は β の少なくとも何れか一方が 0 のときの逆数は，

$$\left(\frac{0}{\beta}\right)^{-1} = \left(\frac{0}{\beta}\right)^0 \frac{\beta}{0} = 0 \cdot 0 = 0 \qquad (86)$$

$$\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha}{0}\right)^0 \frac{0}{\alpha} = 0 \cdot 0 = 0 \qquad (87)$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)^{-1} = \left(\frac{0}{0}\right)^0 \frac{0}{0} = 0 \cdot 0 = 0 \qquad (88)$$

となる．ただし，実数の逆数を考える場合には，存在算によって，0 以外の実数が 1 の上に立っているのに対して，0 は 1 ではなく，0 自身の上に立っているとでも表現すべきものであり，0 の逆数 0^{-1} が 1/0 ではなく，0 になるという事実には注意を要する．つまり，厳密には，存在算は，対象としている数そのものの存在性を問うものであるが故に，他の演算に先んじて実行しなければならないのであり，(79)式は，

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 \frac{\beta}{\alpha} \qquad (89)$$

のように存在算を含めて厳密化され，(89)式左辺は，α，β のうち少なくとも何れか一方が 0 ならば，存在算の演算が実行されて，括弧内が 0 を意味するものとなって，0^{-1} となる一方で，右辺は，0 であるから結果的に，$0^{-1}=0$ が一意的に成り立つと言える．このことは，(86)，(87)，(88)式の何れも両辺の逆数をとった際に，それぞれ，

$$0^{-1}=\left(\left(\frac{0}{\beta}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{0}{\beta}\right)^{+1}=0^1=0 \qquad (90)$$

$$0^{-1}=\left(\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{+1}=0^1=0 \qquad (91)$$

$$0^{-1}=\left(\left(\frac{0}{0}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{0}{0}\right)^{+1}=0^1=0 \qquad (92)$$

となる結果とも一致する．即ち，

$$0^{-1}=0 \qquad (93)$$

が一意的に成り立つと言える．

他方，α 及び β が共に 0 ではないとき，(59)式より，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0=\gamma^0=1 \qquad (94)$$

が成り立つ．従って，α 及び β が共に 0 ではないとき，α/β の逆数，即ち $(\alpha/\beta)^{-1}$ は，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0\frac{\beta}{\alpha}=1\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha} \qquad (95)$$

を得る．これより，α 又は β の少なくとも何れか一方が 1 のとき，

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\beta}\right)^0\frac{\beta}{1}=1\cdot\beta=\beta \qquad (96)$$

$$\left(\frac{\alpha}{1}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{1}\right)^0\frac{1}{\alpha}=1\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha} \qquad (97)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{1}\right)^0\frac{1}{1}=1\cdot1=1 \qquad (98)$$

となる．つまり，(74)，(97)式より，

$$\alpha^{-1}=\begin{cases}0 & (\alpha=0)\\ \dfrac{1}{\alpha} & (\alpha\neq0)\end{cases} \qquad (99)$$

を得る．これより，演算として，

$$\times\alpha^{-1}=\begin{cases}\times0 & (\alpha=0)\\ \times\dfrac{1}{\alpha} & (\alpha\neq0)\end{cases} \qquad (100)$$

が成り立ち，他方，

$$\div\alpha=\begin{cases}\times0 & (\alpha=0)\\ \times\dfrac{1}{\alpha} & (\alpha\neq0)\end{cases} \qquad (101)$$

が成り立つ．従って，(100)式と(101)式から，演算置換関係

$$\times\alpha^{-1}\Leftrightarrow\div\alpha \qquad (102)$$

が成り立ち，逆乗算と除算の置き換えが可能であることを示している（剰余形式を採らず，商のみを考慮する場合に限られることに注意を要する.）.

§１３．第七演算　～冪除算と対数算～

前セクションにおける(102)式において，演算置換関係を導いた．そこで，(102)式の関係を(67)式に適用すると，定義より，

$$\frac{a}{a}=\left(\frac{a}{a}\right)^{-1} \qquad (103)$$

であるから，これを勘案して，

$$\left(\frac{b}{b}\cdot b\right)\times\left(\frac{a}{a}\right)\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}\div a^{\theta}=\begin{cases}0 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}=0\right)\\ 1 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\neq 0\right)\end{cases}\quad (0\leq\theta<1) \qquad (104)$$

が得られる．そこで，この左辺を整理して，

$$\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}\div a^{\theta}=\begin{cases}0 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}=0\right)\\ 1 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\neq 0\right)\end{cases}\quad (0\leq\theta<1) \qquad (105)$$

を得る．この(105)式は,

$$\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}\div a^{\theta}=\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\right)\quad (0\leq\theta<1) \qquad (106)$$

と同値である．ここに，(106)式の左辺は，存在算であるから初期に演算し，右辺の括弧内は，存在算であるものの，左辺の演算結果が収束すべき値，即ち，冪除算の収束値を与えているのであり，以下，(106)式の右辺の形式を冪除算の収束値と呼ぶものとする．なお，(106)式において，両辺に$(a/a)(b/b)$が在るので，一見すると両辺から払ってしまうことが出来るように思われるかも知れないが，それは出来ない．何故なら，a 又は b の少なくとも何れか一方が 0 のとき，両辺を 0 で割った形式となってしまうが，その場合，0/0≠1 であって，0 で割ると，商が 0 となることから(106)式は，単に 0＝0 となって零恒等式となってしまうからである．勿論，零恒等式になる操作，即ち，両辺を 0 で除すという操作を行った結果が恒等式になるからと言って，0 で除す直前の式が，真に等式として成立していたということを保証するものではない．両辺に 0 を乗じたり，両辺を 0 で除したりすれば，全て 0 になってしまうのだから，このことは当然と言えば，余りにも当然と言えよう．

例えば，1＝2 という誤った式の両辺を，0 で除すと，0＝0 になる．しかしながら 0 で除した結果が等式として成立しているからと言って，その直前の 1＝2 が等式として正しいとは言えない．

さて，準真数$(b/b)\cdot b$ に対して底 a の存在性を規定する原始自己存在比 a/a を乗じて成る

$$B=\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b \qquad (107)$$

B を以て真数とすると表記上簡便である．なお，(107)式は，

$$B=\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b=\frac{a}{a}b \qquad (108)$$

としてもよい．なぜならば，(108)式の中辺と右辺の関係は，

$$a=0\wedge b=0\Rightarrow\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b=\frac{0}{0}\cdot\frac{0}{0}\cdot 0=0\cdot 0\cdot 0=0,\ \ \frac{a}{a}b=\frac{0}{0}\cdot 0=0\cdot 0=0 \qquad (109)$$

$$a\neq 0\wedge b=0\Rightarrow\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b=1\cdot\frac{0}{0}\cdot 0=1\cdot 0\cdot 0=0,\ \ \frac{a}{a}b=1\cdot 0=0 \qquad (110)$$

$$a\neq 0\wedge b\neq 0\Rightarrow\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b=1\cdot 1\cdot b=b,\ \ \frac{a}{a}b=1\cdot b=b \qquad (111)$$

$$a=0\wedge b\neq 0\Rightarrow\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b=\frac{0}{0}\cdot\frac{b}{b}\cdot b=0\cdot 1\cdot b=0,\ \ \frac{0}{0}b=0\cdot b=0 \qquad (112)$$

が成り立つからであり，表記上の簡便性と計算上の示唆性を併せ持つ形式であって合理的である．勿論，この形式を用いる場合には，原理的には(105)式が厳密であることに注意を要するが，以下ではケースバイケースで(108)式の右辺の省略形式を用いるものとする．ただし，先ずは，ここでは，特に，θ＝0 として，冪除と対数の同値関係を

$$\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c(\text{回除})\equiv\log_a B} \qquad (113)$$

と定義し，非負実数 a は底，非負実数 B は真数であり，c を整数に限定した対数の解（指数）というものとし，

$$\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}=\begin{cases}0 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}=0\right)\\ 1 & \left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\neq 0\right)\end{cases}\quad(\theta=0)\quad\Leftrightarrow\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)=c \qquad (114)$$

と表記し，(114)式の⇔の左側を冪除（算），右側を対数（算）と呼ぶものとする．

つまり，除算を出発点として，冪逆乗算を，除算操作を用いて導出的に定義し，これを冪除算ということとするのである．即ち，冪除算とは，冪逆乗算のうち，真数$(a/a)\times(b/b)\times b$ を底 a で除した際に，除算の結果が，各除算の前後で商が収束に向かう変化を伴うもの（以下，収束除算という．）であって，この収束除算を繰り返し行うことが可能な回数を解（この解を指数という）とし，この解を求める繰り返し操作を行う演算のことを言う．言い換えれば，原始自己存在比 a/a に準真数$(b/b)\cdot b$ を乗じて成る真数$(a/a)\times(b/b)\cdot b$ に対する底 a による繰り返しの収束除算操作を冪除算と定義するのである．この意味で，冪除算は，存在算と除算に基礎を置くものであり，更には減算に基礎を置くものであって，加算や乗算の系統とは独立に定義可能であると言える．

しかしながら，以下では，便宜上，指数算を用いたり，(108)式の最右辺の省略表記を用

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

いたりする．そこで，(114)式の⇔の右側の対数表記を，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right)=\mathrm{c} \qquad (115)$$

とする．これより，$a,b\neq0\wedge\theta＝0$ のとき，直ちに次ぎの関係式が成り立つ．

$$0+1+\log_a\left(\left(\frac{a}{a}b\right)\cdot a^{-1}\right)=\mathrm{c} \qquad (116)$$

なお，便宜上，$\times a^{-1}$ を広義の $\div a$ として収束除算と呼ぶものとすると，(116)式は，更に収束除算を適用できて，

$$0+1+1+\log_a\left(\left(\frac{a}{a}b\right)\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\right)=\mathrm{c} \qquad (117)$$

以下同様に，

$$0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a\left(\left(\frac{a}{a}b\right)\underbrace{\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\cdots\cdot a^{-1}}_{\mathrm{c}\text{ 回除}}\right)=c \qquad (118)$$

である．なぜならば，仮定より，$a,b\neq0\wedge\theta＝0$ であるから，(114)式の定義より，

$$B\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}\div a^0=1 \quad (a,b\neq0)\wedge(\theta＝0)\Leftrightarrow\log_a B=c \qquad (119)$$

である．ここで，真数 B は，$(a/a)b$ に等しいから，(119)式は，

$$\left(\frac{a}{a}b\right)\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}\div a^0=1 \quad (a,b\neq0)\wedge(\theta＝0)\Leftrightarrow\log_a\left(\frac{a}{a}b\right)=c \qquad (120)$$

と表される．そこで，(120)式の⇔の左側のみを考えると，

$$\frac{a}{a}b\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}\div1=b\underbrace{\div a\div a\div\cdots\div a}_{c\text{回除}}=1 \quad (a,b\neq0) \qquad (121)$$

であるから，b について解くと，

$$b=1\underbrace{\times a\times a\times\cdots\times a}_{c\text{回乗}}=a^c \quad (a,b\neq0) \qquad (122)$$

と表される．従って，(122)式を，(116)，(117)，(118)式に代入し，便宜的に存在算の実行を先送りすると，

$$0+1+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^c\cdot a^{-1}\right)=0+1+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^{c-1}\right)=c \qquad (123)$$

であって，

$$0+1+1+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^c\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\right)=0+1+1+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^{c-2}\right)=c \qquad (124)$$

であり，更に，

$$0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^c\underbrace{\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\cdots\cdot a^{-1}}_{\text{c 回逆乗}}\right)$$

$$=0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^c\cdot a^{-c}\right)$$

$$=0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^{c-c}\right)$$

$$=0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^{0}\right)$$

$$=0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a(1\cdot 1\cdot 1)$$

$$=0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a(1)$$

$$=0+c+\log_a(1)=c\quad(a,b\neq 0)\qquad(125)$$

である．ところで，(113)式の定義より，$a\neq 0$ の収束除算の収束値は 1 であるから，真数を底で除しても収束除算できないので，収束除算回数は 0，即ち，対数の解（指数）は，0 に等しい．よって，

$$\log_a(1)=0\quad(a,b\neq 0)\qquad(126)$$

が成り立つ（これについての別証は後述する．）．従って，(126)式を(125)式に代入すると，

$$0\underbrace{+1+1+\cdots+1}_{c\text{回加}}+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot a^c\underbrace{\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\cdots\cdot a^{-1}}_{\text{c 回逆乗}}\right)=0+c+0=c\qquad(127)$$

を得る．

§１４．第七演算　～対数算～

前セクションにおいて，冪除算による対数の定義を得た．そこで，本セクションでは，実際に，底や真数の値を様々に設定した際の演算がどのようなモノになるかをひとつずつ見て行くものとする．そこで，これに先立ち，底 a，準真数 b，対数の解 c についての組を，(a,b,c)と表記するものとする．

Ⅰ．$(0,0,c)$

(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)=0+\log_0\left(\frac{0}{0}\cdot 0\right)=0+\log_0(0\cdot 0)=0+\log_0(0)\qquad(128)$$

と展開される．この(128)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数を底で

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

除す際に，この除算の前後で真数と商が変化を伴わないから，収束除算回数 c は 0 となる．従って，対数の解 c＝0 が成り立つ．また，底 a＝0 のとき，(114)式による定義における冪除算では，収束値が 0 となる．よって，収束除算 0 回に実行により，収束値 0 に達していることになり，やはり対数の解 c は 0 となる．

つまり，

$$\log_0(0) = 0 \qquad (129)$$

が成り立つ．よって，$(0,0,c) \Rightarrow (0,0,0)$である．

Ⅱ．$(0,b\neq 0,c)$

(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right) = 0+\log_0\left(\frac{0}{0}\cdot b\right) = 0+\log_0(0\cdot b) = 0+\log_0(0) \quad (b\neq 0) \qquad (130)$$

と展開される．この(130)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数を底で除す際に，この除算の前後で真数と商に差が生じない，即ち変化を伴わない除算であるから，収束除算回数 c は 0 となる．従って，対数の解 c＝0 が成り立つ．ここで，(130)式と(128)式を比較することには，幾分かの価値があると思われるので，その比較検討をしておこう．両式の最大の相違点は，準真数 b の値であるが，(130)式では，準真数 b が 0 ではないにも拘わらず，真数 B としては，B＝0 となっていることであり，その結果，対数の解 c が何れのケースでも 0 となっているということである．つまり，(130)式のケースは，真数 B が準真数 b の存在性のみならず，底 a の存在性に因ってもその存在性が規定される性質のモノであるということを物語っているのである．

つまり，省略表記として，

$$\log_0(b) = 0 \quad (b\neq 0) \qquad (131)$$

が成り立つ．よって，ケースⅠ，Ⅱより，$(0,0,c)\wedge(0,b\neq 0,c) \Rightarrow (0,\forall b,0)$である．

Ⅲ．$(a\neq 0,0,c)$

(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right) = 0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot 0\right) = 0+\log_a(1\cdot 0) = 0+\log_a(0) \quad (a\neq 0) \qquad (132)$$

と展開される．この(132)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数を底で除す際に，この除算の前後で真数と商が変化を伴わない除算であり，b/b＝0 であるから収束値は 0 であって，収束除算ではなく，従って，収束除算回数 c は 0 となる．従って，対数の解 c＝0 が成り立つ．

つまり，省略表記として，

$$\log_a(0) = 0 \quad (a\neq 0) \qquad (133)$$

が成り立つ．よって，ケースⅠ，Ⅲより，$(0,0,c)\wedge(a\neq 0,0,c) \Rightarrow (\forall a,0,0)$である．つまり，ケ

ースⅡ，Ⅲの帰結から，底又は準真数の何れか少なくとも一方が 0 のとき，対数の解は 0 となる，即ち，$(\forall a,0,c)\wedge(0,\forall b,c)\Rightarrow(0 \text{ or} \forall a,\forall b \text{ or } 0,0)$が成り立つと言える．

Ⅳ．$(1,1,c)$

(117)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right)=0+\log_1\left(\frac{1}{1}\cdot 1\right)=0+\log_1(1\cdot 1)=0+\log_1(1) \qquad (134)$$

と展開される．この(134)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，収束値は 1 であって，真数 1 を底 1 で除す際に，この除算の前後で真数と商との差が無く，変化を伴わない除算であるから収束除算回数 c は 0 となる．従って，対数の解 $c=0$ が成り立つ．また，底 $a=1$ のとき，(109)式による定義における冪除算では，収束値が 1 となる．よって，収束除算を実行するまでもなく，収束値に達していることになり，やはり対数の解 c は 0 となると言い換えても結論は同じである．

つまり，

$$\log_1(1)=0 \qquad (135)$$

が成り立つ．よって，$(1,1,c)\Rightarrow(1,1,0)$である．

Ⅴ．$(1,b\neq 0 \text{ or } 1,c)$

(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right)=0+\log_1\left(\frac{1}{1}\cdot b\right)=0+\log_1(1\cdot b)=0+\log_1(b) \quad (b\neq 0,1) \qquad (136)$$

と展開される．この(136)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数 $b\neq 0$ or 1 を底 1 で除す際に，この除算の前後で真数 b と商 b が変化を伴わない除算であるから収束除算ではなく，従って，収束除算回数 c は 0 となる上，収束値は，1 であるが，$b\neq 1$ であるからこの冪除算における演算は収束しない．故に，解無しである．

つまり，省略表記として，

$$\log_1(b)=\mathrm{N/A} \quad (b\neq 0,1) \qquad (137)$$

が成り立つ．よって，ケースⅤより，$(1,b\neq 0 \text{ or } 1,c)\Rightarrow(1, b\neq 0 \text{ or } 1,\mathrm{N/A})$である．

Ⅵ．$(a\neq 0 \text{ or } 1,1, c)$

(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right)=0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot 1\right)=0+\log_1(1\cdot 1)=0+\log_a(1) \quad (a\neq 0,1) \qquad (138)$$

と展開される．この(138)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数 1 を底 $a\neq 0$ or 1 で除す際に，この除算の前後で真数 1 と商 $1/a$ が変化を伴うものであるが，底 $a\neq 0$ であるからこの繰り返し除算の収束値は 1 でなければならず，この場合の繰り返し除算の

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

結果は，$\lim_{n\to\infty} 1/a^n \neq 1$ であるから収束除算ではなく，従って，収束除算回数 c は 0 となる．従って，(138)式の対数の解 $c=0$ が成り立つ．また，底 $a\neq 0$ or 1 のとき，(114)式による定義における冪除算では，収束値が 1 となる一方で，真数は 1 であるから，収束除算を実行するまでもなく，収束値 1 に達していることになり，やはり(137)式の対数の解 c は 0 となる．

つまり，省略表記として，

$$\log_a(1) = 0 \quad (a \neq 0,1) \qquad (139)$$

が成り立つ．よって，ケースⅡ，Ⅳ，Ⅵより，$(0,\forall b,c)\wedge(1,1,c)\wedge(a\neq 0 \text{ or } 1,1,c)\Rightarrow(\forall a,1,0)$ である．

Ⅶ．$(a\neq 0$ or $1,a,c)$

この条件は，$a=b$ であって，且つ，$a\neq 0,1$ また $b\neq 0,1$ であることを示している．従って，(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right) = 0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right) = 0+\log_a(1\cdot a) = 0+\log_a(a) \quad (a \neq 0,1) \qquad (140)$$

と展開される．この(140)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数 a を底 a で除す際に，この除算の前後で真数 a と商 1 が変化を伴う除算であるから収束除算であって収束値が 1 であるから収束除算を実行すると，その回数 c は 1 となることが判る．より明示的には，(114)式の定義より，　$b\div a=a\div a=1$ となって，収束除算 1 回の実行で，商が $a\neq 0$ の場合の収束値 1 に達するからである．従って，対数の解 $c=1$ が成り立つ．

つまり，省略表記として，

$$\log_a(a) = 1 \quad (a \neq 0,1) \qquad (141)$$

が成り立つ．よって，ケースⅠ，Ⅲより，$(a\neq 0$ or $1,a,c)\Rightarrow(a\neq 0$ or $1,a,1)$である．

Ⅷ．$(a\neq 0$ or $1,b\neq 0$ or 1 or $a,c)$

この条件は，$a\neq b$ であって，且つ，$a\neq 0,1$ また $b\neq 0,1$ であることを示している．従って，(115)式より，求める対数算は，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}b\right) = 0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right) = 0+\log_a(1\cdot b) = 0+\log_a(b) \quad (a,b \neq 0,1 \wedge a \neq b) \qquad (142)$$

と展開される．この(142)式の最右辺の対数は，冪除算（対数算）の定義より，真数 b を底 a で除す際に，この除算の前後で真数 b と商 b/a は変化を伴う除算であるものの，収束値 1 に向かう除算であるかは，一意的に定まる訳ではない．しかし，ここでは，この除算が収束値 1 に向かう除算であるものに限って話しを進めるものとしよう．

今，準真数 b が，

$$b = a^{c+\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 1) \qquad (143)$$

で与えられたとする．そこで，(136)式を(135)式の最右辺に代入すると，省略表記として，

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

$$\log_a(b) = \log_a\left(a^{c+\theta}\right) \quad (a, b \neq 0,1 \wedge a \neq b \wedge 0 \leq \theta \leq 1) \qquad (144)$$

となる．すると，(127)式の定理から，

$$\log_a\left(a^{c+\theta}\right) = c + \log_a\left(a^{\theta}\right) \quad (0 \leq \theta \leq 1) \qquad (145)$$

が得られる（ただし，$a, b \neq 0,1 \wedge a \neq b$ であるが，以下これを略記するものとする.）．ところで，如何なる 1 より小さな小数も有理数で幾らでも精度よく近似できる．そこで，次の大小関係を満たす 2 つの自然数 $p<q$ に対して，

$$\theta \cong \frac{p}{q} \quad (0 < \theta < 1) \qquad (146)$$

が成り立つとする．このとき，$a,b \neq 0$ とすると，原始自己存在比$(a/a) \cdot (b/b) = 1$ であるから，これを省略すると，

$$\log_a\left(a^{\theta}\right) = \log_a\left(a^{\frac{p}{q}}\right) \qquad (147)$$

としてよい．そこで，(147)式の右辺を以下のように展開すると，(122)式より，

$$\log_a\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{\log_{a^{1/q}}\left(a^{\frac{p}{q}}\right)}{\log_{a^{1/q}}(a)} = \frac{\log_{a^{1/q}}\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}\right)}{\log_{a^{1/q}}\left(a^{\frac{q}{q}}\right)} = \frac{p}{\log_{a^{1/q}}\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{q}\right)} = \frac{p}{q} \qquad (148)$$

を得る．なお，(148)式における底の変換は，後述の底の変換定理を用いている．

ここで，θ が無理数で $0<\theta<1$ を満たし，$n=1,2,3,\cdots$ とし，

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \theta < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \wedge \left|\theta - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right| > \left|\theta - \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right| \wedge \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \wedge \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \qquad (149)$$

とするならば，数学的帰納法により，

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \cdots < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \theta < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \cdots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2} \quad (k \in \mathrm{N}) \qquad (150)$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \log_a\left(a^{\frac{p_n}{q_n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta \qquad (151)$$

が成り立つ（ただし，(151)式左辺が動数であるから右辺も動数となる故に，θ は動数であると言える．これについては，このあと直ぐに述べよう.）．故に，

$$\log_a\left(a^{\theta}\right) = \theta \qquad (152)$$

を得る．よって，(152)式を(145)式に代入すれば，

$$\log_a\left(a^{c+\theta}\right) = c + \theta \quad (0 \leq \theta \leq 1) \qquad (153)$$

を得る．

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

＜補遺＞　静数と動数

(151)式において，極限が出てきたので，ここで，極限とはどのようなモノかを考察しておくこととしよう．

定義

“有限概念で定義不能な数を動数といい，有限概念で定義可能な数を静数という．”

以上の定義によれば，例えば，有理整数は全て静数であると言い得，無理数は全て動数であると言える．これらを含めて，どのようなモノが静数或いは動数であるか，以下に，簡単な例を示す．

Ⅰ．動数　“∞”

代表的な動数としては，∞を挙げることが出来る．そこで，∞が何故，動数であると言えるかを証明しよう．

証明）静的定数，即ち，静数であって且つ定数である最大の数 M が有るとする．すると，∞は如何なる大きな定数に対しても同等以上なのであるから，

$$M \leq \infty \qquad (154)$$

が成り立つ．そこで，現最大数 m に 1 を加えた数は，

$$m < m + 1 \qquad (155)$$

である．いま，現最大数が最大数より 1 だけ小さかったとすると，明らかに，$m+1=M$ が成り立つので，

$$m < M \qquad (156)$$

が成り立つ．(156)式の両辺に，1 を加えると，

$$m + 1 = M < M + 1 \qquad (157)$$

が成り立つことになるが，これは，最大数 M より大きな数が存在することになり，不合理である．このような不合理が生じたのは，最大数 M が定数であるとしていることによる．つまり，現最大数であって，それより大きな数が存在することを意味する．つまり，最大数 M は，存在せず，動的な意味で現最大数 m なのであって，常に更新され続けるものであると言える．すると，∞とは常に更新され続ける現最大数と同等以上の存在であると言える．

別証）∞が定数であると仮定する．このとき，最大の数が M であるとすると，

$$M = \infty \qquad (158)$$

が成り立つ．いま，最大の数 M よりも 1 だけ小さい数を m とすると，

$$m < M \qquad (159)$$

であるから，(159)式の両辺に 1 を加えると，

$$m + 1 < M + 1 \qquad (160)$$

であって，

$$M < M + 1 \qquad (161)$$

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

を得る．(161)式は，明らかに，最大の数 M よりも大きな定数が存在することを示しているので，仮定に反し不合理である．このような不合理が生じたのは，最大の数 M が存在すると仮定したからである．従って，最大の数は存在しない．これより，∞は極めて大きな数であるとしてもそれは定数ではないことが示されたと言える．このことから，無限は有限表示では定義不能な数であると考えられるであろう．そこで，次に，それを示そう．

無限「∞」をどんなに大きな正定数 m よりも大きな正数 M に対して $M≦∞$が成り立つものとして定義する．すると，あたかも有限表示によって∞を厳密に定義出来たかのようであるが，実際には，数学的帰納法と極限が必要である．即ち，十分に大きな正定数 m_1，m_2，m_3，・・・に対して，

$$1 \ll m_1 = {m_0}^{m_0} < m_2 = {m_1}^{m_1} < \cdots < m_n = {m_{n-1}}^{m_{n-1}} < M(n) \qquad (162)$$

が成り立つとする．(162)式より，明らかに，

$$m_1 < M(1) \qquad (163)$$

であって，また，$n=k+1$ として，

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_k = {m_{k-1}}^{m_{k-1}} < m_{k+1} = {m_k}^{m_k} < M(k+1) \qquad (164)$$

が成り立つ．$k+1=N$ とすれば，明らかに，

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_{N-1} = {m_{N-2}}^{m_{N-2}} < m_N = {m_{N-1}}^{m_{N-1}} < M(N) \qquad (165)$$

であって，(165)式の最右辺より左側の不等式によって規定される数列は，急速に増大する，明らかに収束しない発散数列である．しかしながら，有限項の数列では最大値を有するので，N としては，自然数を極限まで大きくとる必要があるものの，どれだけ大きな自然数であってもそれより大きな自然数が存在することより，極限まで大きな自然数を採ることは可能である．ただし，M を定数とするとどれだけ大きな定数であってもそれを越える定数は存在するので，M は定数ではないと言える．故に，無限は定数ではない．また，仮定より，

$$\lim_{N \to {m_N}^{m_N}} {m_N}^{m_N} < M \leq \infty \qquad (166)$$

が言える．しかし，これは循環代入，

$$\lim_{N \to {m_N}^{m_N}} {m_{m_{\ddots}}}^{m_{m_{\ddots}}} \leq M \leq \infty \qquad (167)$$

となって際限が無い形式であり，有限形式の表示ではないと言える．従って，M は動数である．また，これは，

$$\lim_{N \to {m_N}^{m_N}} {m_{m_{\ddots}}}^{m_{m_{\ddots}}} = \infty \leq M \leq \infty \qquad (168)$$

であるから，明らかに，$M=∞$が成り立つと言える．これより，∞は静数ではなく，動数であると言える．

Ⅱ．動数　“無理整数”

従来は，例えば，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad (169)$$

のような形式を多用している．これらのような極限の思想を用いて表される，これまでの極限値は，一般的な数として扱われて来ている，しかし，これに基づけば，動数を μ_N，静数を ζ_N と置いたなら，

$$\mu_N = \zeta_N \qquad (170)$$

が成り立つということを意味することになる．しかしながら，(170)式左辺は動的であって，1 点に定まったモノではなく，右辺は静的であって，1 点に定まったモノであり，これは明らかに等価でなく，不合理である．故に，

$$\mu_N \neq \zeta_N \qquad (171)$$

が成り立つ．

ところで，Richard Dedekind の切断によれば，実数連続体を有理整数点で切断すれば，一方には，最小値（又は最大値）として有理整数が含まれ，他方には最大値（又は最小値）が存在しない端部を含む，２つ実数連続体片に分かれる．つまり，後者の実数連続体片には，最大値（又は最小値）が存在しないから，切断点である或る有理整数値にどこまでも接近する極限値としての端部が存在することになるが，勿論，この端部と，切り離された相手側の実数連続体片の最小値との間には，大小関係が成り立つ．このことから，明らかに，以下の如くの関係，

$$\hat{0} \equiv \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = {}^{+}\dot{0} > 0 \qquad (172)$$

$$\check{0} \equiv \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = {}^{-}\dot{0} < 0 \qquad (173)$$

$$\hat{0} \equiv \lim_{x \to +:0} x = {}^{+}\dot{0} > 0 \qquad (174)$$

$$\check{0} \equiv \lim_{x \to -:0} x = {}^{-}\dot{0} < 0 \qquad (175)$$

$$\hat{1} \equiv \lim_{x \to +:1} x = {}^{+}1.\dot{0} > 1 \qquad (176)$$

$$\check{1} \equiv \lim_{x \to -:1} x = {}^{-}1.\dot{0} < 1 \qquad (177)$$

が成り立つ．これら(172)～(177)式のように，極限を用いて表される整数を無理整数ということとし，(172)～(177)式の例のように表記するものとする．

以上を用いれば，

$$\hat{1} = 1 + \hat{0} \qquad (178)$$

$$\check{1} = 1 - \hat{0} \qquad (179)$$

$$\frac{1}{\hat{0}} = +\infty \qquad (180)$$

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

$$\frac{1}{\breve{0}} = -\infty \qquad (181)$$

などが示される．

§１５．第七演算　～対数の諸定理～

Ⅰ．特殊加法定理

(127)式の左辺を，

$$1 = \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) \qquad (182)$$

で置き換えると，

$$\underbrace{0 + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \cdots + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right)}_{c\text{回加}} + \log_a\left(\frac{a}{a} a^c \underbrace{\cdot\, a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \cdots \cdot a^{-1}}_{\text{c 回逆乗}}\right) = c \quad (183)$$

となって，加法展開が可能であることを示唆している．つまり，

$$\log_a\left(\frac{a}{a} \underbrace{\cdot\, a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{c 回乗}}\right) = 0 \underbrace{+ \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \cdots + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right)}_{c\text{回加}} \qquad (184)$$

を得る．

序でながら，(184)式を整理すると，

$$\underbrace{0 + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \cdots + \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right)}_{c\text{回加}} + \log_a\left(\frac{a}{a}\right) = c \qquad (185)$$

更に，整理を進めると，

$$0 + c \log_a\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) + \log_a\left(\frac{a}{a}\right) = c \qquad (186)$$

となるが，$a \neq 0$ ならば，$\log_a(a) = 1$ であるから，(186)式は，

$$0 + c \cdot 1 + \log_a\left(\frac{a}{a}\right) = c \qquad (187)$$

これより，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\right) = 0 \qquad (188)$$

を得る．勿論，a＝0 のとき，(185)～(187)式における c は c＝0 なる上，$\log_a(a)$＝0 であるから，(188)式は，a＝0 の場合にも成り立つと言える．

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

Ⅱ．逆底変換の定理

真数 $a\neq 0$ に対して，底を非負実数 a を用いて a^{-1} で与えられるとき，

$$\log_{a^{-1}}\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}}\cdot a\right)=1+\log_{a^{-1}}\left(\left(\frac{a}{a}\right)^{-1}\cdot a\cdot(a^{-1})^{-1}\right)$$

$$=1+\log_{a^{-1}}\left(\frac{a}{a}\cdot a\cdot a^{+1}\right)$$

$$=1+\log_{a^{-1}}\left(\frac{a}{a}\cdot a^{2}\right)$$

$$=1+2\log_{a^{-1}}\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)$$

$$\therefore\quad \log_{a^{-1}}\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)=-1$$

$$\log_{a^{-1}}\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)=-\log_{a}\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)\qquad(189)$$

$$\log_{a^{-1}}(a)=-\log_{a}(a)\qquad(190)$$

が成り立つ.

Ⅲ．逆真数変換の定理

$a\neq 0$ に対する真数 a^{-1} に対して，非負実数 a を底として a^{-1},

$$\log_{a}\left(\frac{a}{a}\cdot a^{-1}\right)=-\log_{a^{-1}}\left(\frac{a}{a}\cdot a^{-1}\right)$$

$$=-[1+\log_{a^{-1}}\{(a^{-1})\cdot(a^{-1})^{-1}\}]$$

$$=-\{1+\log_{a^{-1}}(a^{-1})\cdot(a^{+1})\}$$

$$=-\{1+\log_{a^{-1}}(a^{0})\}$$

$$=-(1+0)$$

$$=-1$$

$$\log_{a}(a^{-1})=-\log_{a}(a)\qquad(191)$$

が成り立つ.

Ⅳ．準真数 1 の対数の解

$$\log_{a}\left(\frac{a}{a}\cdot 1\right)=1+\log_{a}\left\{\left(\frac{a}{a}\cdot 1\right)\cdot a^{-1}\right\}$$

$$=1+\log_{a}\left(\frac{a}{a}\cdot a^{-1}\right)$$

$$=1-\log_{a}\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)$$

$$= 1 - \left\{1 + \log_a \left\{\left(\frac{a}{a} \cdot a\right) \cdot a^{-1}\right\}\right\}$$

$$= 1 - 1 - \log_a \left(\frac{a}{a} \cdot a^0\right)$$

$$= 0 - \log_a \left(\frac{a}{a} \cdot 1\right)$$

$$= -\log_a \left(\frac{a}{a}\right)$$

$$= 0 \qquad (192)$$

Ⅴ．底の変換定理

定理　非負実数 a,b,c について, $(a/a)\cdot b$ が a で n 回除して収束値 0 又は 1 に達し, $(a/a)\cdot(c/c)a$ が c で m 回除して収束値 0 又は 1 に達するならば, $(a/a)\cdot(c/c)\cdot b$ は c で $n\times m$ 回除して収束値 0 又は 1 に達する.

証明　仮定より,

$$\frac{b}{b}b \cdot \frac{a}{a}\underbrace{\div a \div a \div \cdots \div a}_{n\text{回除}} = \begin{cases} 0 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} = 0\right) \\ 1 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \neq 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \log_a \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot b\right) = n \qquad (193)$$

また,

$$\frac{a}{a}a \cdot \frac{c}{c}\underbrace{\div c \div c \div \cdots \div c}_{m\text{回除}} = \begin{cases} 0 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{c}{c} = 0\right) \\ 1 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{c}{c} \neq 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \log_c \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{c}{c} \cdot a\right) = m \qquad (194)$$

であるから，(193)式と(194)式より,

$$\frac{b}{b}b \cdot \frac{a}{a}\underbrace{\div \left(\frac{c}{c}\underbrace{\times c \times c \times \cdots \times c}_{m\text{回乗}}\right) \div \left(\frac{c}{c}\underbrace{\times c \times c \times \cdots \times c}_{m\text{回乗}}\right) \div \cdots \div \left(\frac{c}{c}\underbrace{\times c \times c \times \cdots \times c}_{m\text{回乗}}\right)}_{n\text{回除}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c} = 0\right) \\ 1 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c} \neq 0\right) \end{cases} \qquad (195)$$

これを整理すると，冪除算と対数の定義より,

$$\left(\frac{b}{b}b \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{c}{c}\right)\underbrace{\div c \div c \div \cdots \div c}_{n\times m\text{回除}} = \begin{cases} 0 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c} = 0\right) \\ 1 & \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c} \neq 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \log_c \left(\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{c} \cdot b\right) = n \times m \qquad (196)$$

が成り立つ．従って，(193)，(194)，(195)式より,

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)\times\log_c\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{c}{c}\cdot a\right)=n\times m=\log_c\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot\frac{c}{c}\cdot b\right) \qquad (197)$$

を得る．ただし，c は a の存在性に連動してその存在の有無が規定されることから，

$$\frac{a}{a}=\frac{c}{c} \qquad (198)$$

が成り立つように，c を決定する必要がある．つまり，(198)式を満たすならば，(197)式の左辺と右辺より，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot b\right)=\frac{\log_c\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{b}\cdot\frac{c}{c}\cdot b\right)}{\log_c\left(\frac{a}{a}\cdot\frac{c}{c}\cdot a\right)} \qquad (199)$$

を得る．ここで，(199)式が(198)を満たすことから

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)=\frac{\log_c\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)}{\log_c\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)} \qquad (200)$$

と略記できる．

VI．一般加法定理

或る数 α，β が，非負実数で，非負実数 a を底とするとき，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\alpha\cdot\beta\right)=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\alpha\right)+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\beta\right) \qquad (201)$$

が成り立つ．

証明）準真数 b が，

$$b=a^{c+\theta} \quad (c\in\mathrm{N}\wedge 0\le\theta<1) \qquad (202)$$

で与えられ，或る数 α，β が，

$$\alpha=a^{d+\delta},\beta=a^{e+\varepsilon} \quad (d,e\in\mathrm{N}\wedge 0\le\delta,\epsilon<1) \qquad (203)$$

と表され，また便宜上，

$$c=d+e\wedge\theta=\delta+\varepsilon \qquad (204)$$

が成り立つとする（勿論，これは便宜上の関係式であって，一般には，この成立は必要条件ではないことに注意を要する．）．このとき，

$$b=a^{c+\theta}=a^{(d+e)+(\delta+\varepsilon)}=a^{(d+\delta)+(e+\varepsilon)}=a^{d+\delta}\cdot a^{e+\varepsilon}=\alpha\cdot\beta \qquad (205)$$

であるから，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^{c+\theta}\right)$$

$$=(c+\theta)\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)$$

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

$$=\{(d+e)+(\delta+\varepsilon)\}\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)$$

$$=(d+\delta)\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)+(e+\varepsilon)\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right)$$

$$=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^{d+\delta}\right)+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^{e+\varepsilon}\right)$$

$$=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\alpha\right)+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\beta\right)$$

$$\therefore\quad \log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\alpha\cdot\beta\right)=\log_a\left\{\left(\frac{a}{a}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\frac{a}{a}\cdot\beta\right)\right\}=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\alpha\right)+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\beta\right)\qquad(206)$$

が成り立つ．ただし，底の存在性に関し，

$$\left(\frac{a}{a}\right)^1=\left(\frac{a}{a}\right)^n\quad(n\in\mathrm{N})\qquad(207)$$

を用いているが，この細胞分裂のような関係を表す(207)式を用いて，(206)式のように展開することは必須不可欠であり，これ無くすれば，矛盾が生じる．つまり，これは，原理であると言ってよい．

Ⅶ．準真数 $b=a^{\theta}$（$0\leqq\theta<1$）の対数算

1より大きな或る有理数 ω を用いて，

$$\theta=\frac{1}{\omega}\quad(\omega>1)\qquad(208)$$

とする．すると，

$$1=0\underbrace{+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}+\cdots+\frac{1}{\omega}}_{N\text{回加}}\qquad(209)$$

を満たす N は，$N=\omega$ であるから，

$$1=0\underbrace{+\theta+\theta+\cdots+\theta}_{\omega\text{回加}}=\theta\times\omega\qquad(210)$$

である．従って，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\underbrace{a^{\theta}\cdot a^{\theta}\cdot\cdots\cdot a^{\theta}}_{\omega\text{回乗}}\right)=\log_a\left(a^{\overbrace{\theta+\theta+\cdots+\theta}^{\omega\text{回加}}}\right)=\log_a\left(a^{\theta\omega}\right)=\log_a\left(a^1\right)=\log_a(a)=1\qquad(211)$$

であるから，

$$\log_a\left(a^{\theta\omega}\right)=1\qquad(212)$$

と整理される．また，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\underbrace{a^\theta\cdot a^\theta\cdot\cdots\cdot a^\theta}_{\omega\text{回乗}}\right)=0\underbrace{+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)+\cdots+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)}_{\omega\text{回加}}$$

$$=\omega\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)=1 \qquad (213)$$

であるから，(213)式の末尾の等式の両辺を ω で除すると，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)=\frac{1}{\omega}=\theta \qquad (214)$$

を得る．これより，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)=\theta \qquad (215)$$

を得る．そこで，この辺々に，

$$1=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right) \qquad (216)$$

を乗じると，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^\theta\right)=\theta\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a\right) \qquad (217)$$

が成り立つことが判る．なお，この一連の対数算において，(213)式では，一般加法定理を用いて式の展開を行った．

さて，(215)式を(145)式に代入すれば，

$$\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot a^{c+\theta}\right)=c+\theta \quad (0\leq\theta\leq1) \qquad (218)$$

を得る．従って，(217)式までの展開を用いれば，一般に，省略表記として，

$$\log_a\left(a^{c+\theta}\right)=(c+\theta)\log_a(a) \quad (0\leq\theta\leq1) \qquad (219)$$

が成り立つと言える．

よって，ケースⅧより，c を正整数，$0\leqq\theta<1$ として，

$$(a\neq0 \text{ or } 1,\ b=a^{\,c+\theta},x)\Rightarrow(a\neq0 \text{ or } 1,\ b=a^{\,c+\theta},\ c+\theta)$$

である．

Ⅷ．一般真数指数の定理

底 a に対して，準真数が b^d で与えられる場合，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b^d\right)=0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdots\cdot b}_{d\text{回乗}}\right) \qquad (220)$$

とおける．ここで，一般加法定理を用いると，

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdots\cdot b}_{d\text{回乗}}\right)=0\underbrace{+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)+\cdots+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)}_{d\text{回加}}$$

$$=0+d\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)$$

$$0+\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b^d\right)=0+d\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right) \qquad (221)$$

を得る.

IX．対数の連分数展開

定理　非負正数 n_1，n_2，・・・，$n_{k\text{-}1}$，n_k と，$0<a_{k+1}<a_k<\cdots<a_2<a_1$ を満たす実数 a_j とに対して，

$$a_{j-1}=a_j{}^{n_j}\cdot a_{j+1} \qquad (j=1,2,3,\cdots,k)$$

が成り立つならば,

$$\log_{a_1}a_0=n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cfrac{1}{\ddots\, n_j+\cfrac{1}{\log_{a_{j+1}}a_j}}}}$$

が成り立つ．ただし，$j\to k$ とする.

証明　仮定より，$j=1$ のとき,

$$a_0=a_1{}^{n_1}\cdot a_2 \qquad (222)$$

となる．従って，これを与式の左辺に代入すれば,

$$\log_{a_1}a_0=\log_{a_1}a_1{}^{n_1}\cdot a_2 \qquad (223)$$

であって，定義より,

$$\log_{a_1}a_0=\log_{a_1}a_1{}^{n_1}\cdot a_2=\log_{a_1}a_1{}^{n_1}+\log_{a_1}a_2=n_1+\log_{a_1}a_2 \qquad (224)$$

を得る．ここで，定義より底の変換を施すと,

$$\log_{a_1}a_0=n_1+\log_{a_1}a_2$$

$$=n_1+\frac{\log_{a_2}a_2}{\log_{a_2}a_1}$$

$$=n_1+\frac{1}{\log_{a_2}a_1} \qquad (225)$$

を得る．仮定より，$j=2$ のとき,

$$a_1=a_2{}^{n_2}\cdot a_3 \qquad (226)$$

となる．(226)式を(225)式に代入すると,

$$\log_{a_1} a_0 = n_1 + \frac{1}{\log_{a_2} {a_2}^{n_2} \cdot a_3} \qquad (227)$$

であるから，定義より，

$$\log_{a_1} a_0 = n_1 + \frac{1}{\log_{a_2} {a_2}^{n_2} + \log_{a_2} a_3} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \log_{a_2} a_3} \qquad (228)$$

を得るので，定義より底の変換を施すと，

$$\begin{aligned} \log_{a_1} a_0 &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \log_{a_2} a_3} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{\log_{a_3} a_3}{\log_{a_3} a_2}} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\log_{a_3} a_2}} \qquad (229) \end{aligned}$$

を得る．以下，j 回同様の操作をすることで，

$$\log_{a_1} a_0 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots \, n_j + \cfrac{1}{\log_{a_{j+1}} a_j}}}} \qquad (230)$$

を得る．ここで，$j \to k$ とすることが可能であるから定理は証明された．□

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

§１６．対数算（冪除算）と指数算（冪乗算）の主値

		$\log_a((a/a)\cdot b)=c$						$(a/a)\cdot a^c=b$					
		b						b					
		0	1/3	1/2	1	2	3	0	1/3	1/2	1	2	3
a	0	0	0	0	0	0	0	0 ⋮ $0<c$	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
	1/3	0	1	0.63⋯	0	-0.63	-1	N/A	1	0.63⋯	0	-0.63	-1
	1/2	0	1.58⋯	1	0	-1	-1.58…	N/A	1.58⋯	1	0	-1	-1.58…
	1	0	N/A	N/A	0	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0	N/A	N/A
	2	0	-1.58⋯	-1	0	1	1.58…	N/A	-1.58⋯	-1	0	1	1.58…
	3	0	-1	-0.63…	0	0.63	1	N/A	-1	-0.63…	0	0.63	1

		$\log_a((a/a)\cdot b)=c$						$(a/a)\cdot a^c=b$					
		c						c					
		0	1/3	1/2	1	2	3	0	1/3	1/2	1	2	3
a	0	0 ⋮ $0<b$	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	0	0	0	0	0	0
	1/3	0 ⋮ 1	0.69⋯	0.57⋯	1/3	1/9	1/27	1	0.69⋯	0.57⋯	1/3	1/9	1/27
	1/2	0 ⋮ 1	0.79⋯	0.70⋯	1/2	1/4	1/8	1	0.79⋯	0.70⋯	1/2	1/4	1/8
	1	0 ⋮ 1	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	1	1	1	1	1	1
	2	0 ⋮ 1	1.25⋯	1.41⋯	2	4	8	1	1.25⋯	1.41⋯	2	4	8
	3	0 ⋮ 1	1.44⋯	1.73⋯	3	9	27	1	1.44⋯	1.73⋯	3	9	27

左上のテーブルは，

$$c=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot b\right)=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot x\right)=y$$

$$\therefore\quad y=\log_a\left(\frac{a}{a}\cdot x\right)\qquad(231)$$

と置いてみたとき，x と y の関係は，定数 a が $a=0$ のとき，明らかに全射であるが，単射でない．従って，右上のテーブルとの間においては，$a=0$ のとき，逆関数の関係が成り立たないことが判る．他方，右下のテーブルは，

$$b=\frac{a}{a}\cdot a^c=\frac{a}{a}\cdot a^x=y$$

$$\therefore\quad y=\frac{a}{a}\cdot a^x\qquad(232)$$

と置いてみたとき，x と y の関係は，定数 a が $a=0,1$ のとき，明らかに全射であるが，単射でない．従って，左下のテーブルとの間においては，$a=0,1$ のとき，逆関数の関係が成り立たないことが判る．

更に，左上と右上のテーブルを比較するとき，左上の $b=0$ の欄には，対応する c の値として，全ての定数 a について解が存在するが，右上のテーブルでは，$a=0$ において解が存在するものの，$a\neq0$ については解が存在せず，左右のテーブル間で逆関係が成り立っていない．これは，緑色字記載の欄でも同様である．逆に，朱字記載欄は全て，全単射が成り立ち，従って，逆関数関係が成立することが判る．そこで，朱字記載の対応値を，冪乗算

と冪除算の主値と呼ぶものとすると，冪乗算と冪除算は主値において逆演算関係が成り立つと言える．また，主値を通じて逆演算関係が成り立つことを，準完全逆演算関係にあるという．なお，テーブルの緑色字及び青色字記載の値は，独立値であるという．つまり，緑字記載の値をとる場合には, 逆関数としての範疇ではその最左欄の朱字記載の主値を採る. また, なお, 右上のテーブルの $a\neq0$ で $b=0$ のとき, N/A（解無し）となるのは,

$$b=\frac{a}{a}\cdot a^c=1\cdot a^x=a^x=0 \qquad (233)$$

としたとき，従来では,

$$a^x=a^\infty=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\infty=\frac{1}{\alpha^\infty}=\frac{1}{\infty}=0 \quad (0<a<1)$$

$$a^x=a^{-\infty}=\frac{1}{a^\infty}=\frac{1}{\infty}=0 \quad (1<a) \qquad (234)$$

と考えてきているが，(234)式の最右の等式関係は，左辺が動数であるのに対して，右辺が静数であるから，等式関係が成り立たず，実際には，(172)式から,

$$\frac{1}{\infty}=\hat{0}\neq0 \qquad (235)$$

が成り立ち，従って，(233)を満たす x が存在しないことから，当該欄は，解無しとなる．

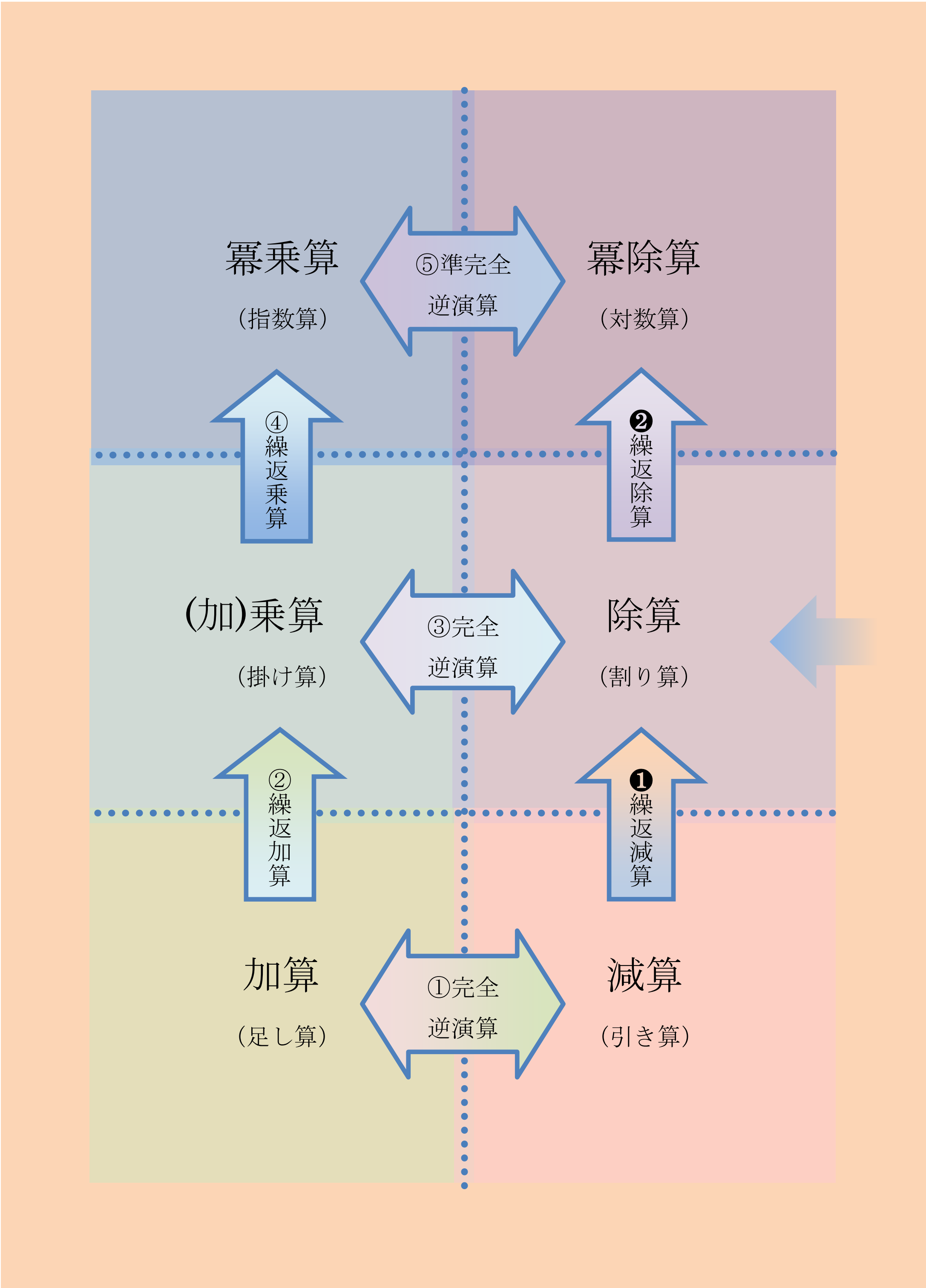
§１７．演算同士の関係ダイアグラム

従来数学の基礎の発展のルートは，足し算に始まり，足し算の逆演算として引き算が定義付けられ，序で，足し算の発展系として掛け算が考え出され，そして掛け算の逆演算として，割り算が定義付けられるというものであったと言ってよいであろう．そして，掛け算の発展系として考え出されたのが指数（算）であり，更には，指数（算）の逆演算として，対数（算）が定義付けられたと言えるであろう．つまり，従来のルートにおいては，引き算や割り算，対数（算）は，独立的に存在するモノではなく，あくまでも加法ルートの各所における逆の存在として定義され, 発生的ではなく, 人為的感のあるルートである.

しかしながらこれまでに本論において見てきた通り，減算や除算，冪除算等は，本来，加法ルートの逆演算として定義されるものではなく，減算は足し算や加法とは独立に定義されるモノであり，減算の上に，除算があって，更に，除算の上に冪除算が減法ルートとして存在しているのである．勿論，従来の加法ルートは，それはそれで独立に存在することになるのであって，各々に対応する演算どうしの関係は，逆演算として関係付け，延いては導出することが可能である．そして，これらの演算関係は，存在算という演算概念が根底を成していたのである．これらの関係を直感的に表示したのが，次に示す七則演算関係ダイアグラムである．このダイアグラムによれば，減法ルートの存在が実在することが直感的且つ容易に理解出来るであろう．

2015.12.31
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

七則演算関係ダイアグラム



Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

論後

本七則演算論は，その体系構築に当たって参考とした文献数はゼロである．強いて言うならば，筆者が 2014 年 3 月 18 日付けで遺した可減集合論が挙げられようか．

さて，本論によれば，零元は，原始自己存在比によって規定され，単位元も原始自己存在比によって規定される．原始自己存在比は，存在算によって演算され，その演算は、除算である．そして，除算は，減算によって規定される．減算は，1 を生じ，また 0 を生じる．減算は，負数を生じ，負数は逆数を生じ，負数は虚数を生じる．また，減算は，差分を生じ，そして，微分を生じる．世界は，減じることでも拡がってゆくのである．そして，演算体系というものが，減算系を中心とした源流によって成立している事実に，気が付いたとき，演算体系というものが，加算系ルートと減算系ルートとがそれぞれ独立的に存在し得，またその間を繋ぐのが，双方から渡ることが出来る逆演算という連絡橋であることが見て取れるのである．しかし，これまで七則演算論前の数学が築いてきた連絡橋は些か不完全なものであった．その橋は，加算ルートからしか渡ることが出来ず，また全てのモノが渡れた訳ではなく，本質的には渡れるモノも渡ってはならないモノとして永らく誤解されて来た．その誤解とは，0 で割るというモノであるが，この演算は乗算側から除算側に向かって一方的に架かっている橋の上を渡ることは出来なかったのである．

ところで，本論における成果はと何かを概観するため，それを以下に列挙しよう．

１．原始自己存在比
２．存在算
３．$0/0=0$
４．$a/0=0$
５．$0^0=0$
６．一般逆数
７．完全逆演算関係
８．除算の厳密な逆関数としての加乗算
９．冪除算の構築
１０．冪除算の収束値の発見
１１．静数と動数
１２．∞が動数に分類されること
１３．無理整数の発見
１４．指数表示との関係を用いない対数の底の変換
１５．対数の連分数展開
１６．対数の諸定理の冪除算のみを用いた導出による対数算の指数算からの独立性の立証
１７．$\log 0=0$
１８．準完全逆演算関係
１９．対数と指数の主値

Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

２０．七則演算間の関係とそのダイアグラムによる視覚化

以上が代表的な成果であるが，しかしながら最大の成果は，零元の生成に始まり，単位元の生成を経つつ，数体系とそれらの間に成り立つ基本的な７つの演算関係の体系を矛盾の無い形で極めて初等的に構築していることであり，従前の数体系の曖昧さや矛盾を取り除き，誤りを正し，自然な拡張を与えていることであるといえようか．いや，未だ幾許か気に掛かることは在る．しかし，それについては，暫し時を待つこととした．