

2016.1.27

Hiroshi Michiwaki

道脇 裕

ニュートン力学における運動の第二法則を例に見るゼロ除算とゼロのゼロ乗の適用法

ニュートンの運動方程式を単純化した形式で表す場合、 $m \neq 0$  として、

$$ma = F \quad (1)$$

と表される。この両辺を  $a$  で除すと、

$$m \frac{a}{a} = \frac{F}{a} \quad (2)$$

を得る。ただし、 $a \neq 0$  の場合に限られるのであれば、

$$m = \frac{F}{a} \quad (3)$$

としてよいが、 $a=0$  を含める場合には、(2)式の形式としなければならない。なぜなら、(2)式から(3)式への整理過程においては、

$$\frac{a}{a} = 1 \quad (4)$$

を仮定していることになるからである。しかしながら、(4)式が成り立つのは、 $a \neq 0$  の場合に限られ、 $a=0$  の場合には、 $a/a$  の比の値は、

$$\frac{a}{a} = \frac{0}{0} = 0 \quad (5)$$

となる。勿論、これはゼロ除算の帰結である。以上より、両辺を  $a$  で除した場合には(2)式を採用する。すると、 $a=0$  のとき、(2)式左辺は、

$$m \frac{a}{a} = m \frac{0}{0} = m \cdot 0 = m \cdot 0^{-1} = 0 \dots m \quad (6)$$

であって、(2)式右辺は、

$$\frac{F}{a} = \frac{0}{0} = 0 \quad (7)$$

を得る。これは勿論、(3)式で誤って、 $a=0$  を代入した次式のような不合理、

$$m = \frac{F}{a} = \frac{0}{0} = 0 \quad \therefore \quad m = 0 \quad (8)$$

には陥らないことを意味する。また、(6)式にみるように、質量  $m$  は、 $m \neq 0$  を仮定しているため、剰余  $m$  が現れる。これは、可減集合論的ゼロ除算によるものであって、(8)式のように、 $m=0$  であるとは述べていない。つまり、質量  $m$  は、或る力  $F$  を加えた際に、生じる加速度  $a$  が判明しない限り、ニュートンの運動法則では、質量  $m$  を知ることが出来ないこと

を意味している。勿論、別途の方法で予め質量  $m$  を知っておけば、(6)式の剰余  $m$  と一致することになる。

次に、存在算を用いて、(1)式を表示し直すと、

$$\left(\frac{m}{m}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right) = \left(\frac{F}{F}\right) \quad (9)$$

と表される。ここで、両辺に  $a^{-1}$  を乗じると (勿論、その存在算を用いて)、

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{m}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right)^{-1} &= \left(\frac{F}{F}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right)^{-1} \\ \left(\frac{m}{m}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right)^{1-1} &= \left(\frac{F}{F}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right)^{-1} \\ \left(\frac{m}{m}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right)^0 &= \left(\frac{F}{F}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

である。次に、簡略化した一般逆数、即ち、存在算を省略した形式を用いて、(1)式の両辺に  $a^{-1}$  を乗じた場合を示そう。これは即ち、

$$\begin{aligned} m \cdot a \cdot a^{-1} &= F \cdot a^{-1} \\ m \cdot a^{1-1} &= F \cdot a^{-1} \\ ma^0 &= Fa^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。これら(10), (11)式において、 $a \neq 0$  とすれば、何れも簡略化形式では、

$$m = \frac{F}{a}$$

となって、(3)式と同様の形になる。しかし、 $a=0$  のとき、(10), (11)式の簡略化形式では、何れも、左辺は、

$$ma^0 = m \cdot 0^0 = m \cdot 0 = m \cdot 0^{-1} = 0 \cdots m \quad (12)$$

であって、右辺は、

$$F \cdot a^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 0^0 = 0 \quad (13)$$

となって、(6), (7)式と本質的に同じ解となることがわかる。

さて、(3)式を出発点とした場合、この両辺に、 $a$  を乗じて、

$$ma = \frac{F}{a} a \quad (14)$$

を得るが、この両辺に更に、 $a^{-1}$  を乗じると、

$$\begin{aligned} m \cdot a \cdot a^{-1} &= \frac{F}{a} \cdot a \cdot a^{-1} \\ ma^0 &= \frac{F}{a} a^0 \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。(15)式は、 $a \neq 0$  である限り、(3)式と同じ形式であるが、 $a=0$  のとき、(3)式は正しくなく、(15)式は正しい形式となる。つまり、(3)式は狭義式であって、その自然な拡張が(15)

式であると言える。又この式は、有限の質量  $m$  に対して、有限の力  $F$  を加えても有限の加速度  $a$  を生じさせられないケースも読み取ることができる。それは、例えば、固定された物体に力を加えても動かさないということに似ているかも知れない。