

2016年2月14日

Hiroshi Michiwaki

道脇 裕

二直線の直交条件と直交座標の構造とゼロ除算

二直線 $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ が直交する条件は, 傾き a , a' をそれぞれ,

$$a = \tan \alpha, \quad a' = \tan \alpha' \quad (1)$$

とすれば,

$$\alpha' - \alpha = \pm \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

である. これより, (1)式は,

$$a' = \tan \alpha' = \tan \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \alpha = -(\tan \alpha)^{-1} \quad (3)$$

と表される. 従って,

$$a \cdot a' = \tan \alpha \cdot \tan \alpha' = \tan \alpha \cdot (-\cot \alpha) = -\tan \alpha \cdot (\tan \alpha)^{-1} \quad (4)$$

が成り立つ. (4)式は, 更に変形できて,

$$-\tan \alpha \cdot (\tan \alpha)^{-1} = -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^{-1} = -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \quad (5)$$

を得る. (5)式は, 挟角 α が,

$$\alpha \neq \left\{ k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (6)$$

のとき, 明らかに, -1 であるから,

$$a \cdot a' = -\tan \alpha \cdot (\tan \alpha)^{-1} = -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^{-1} = -1 \quad (7)$$

となる. 他方, (5)式は, 挟角 α が,

$$\alpha = \left\{ k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (8)$$

のとき, 即ち, k を整数として,

$$\alpha = k\pi \quad (9)$$

の場合と,

$$\alpha = \frac{2k-1}{2}\pi \quad (10)$$

の場合に分けられ, (9)式の場合,

$$-\tan k\pi \cdot (\tan k\pi)^{-1} = -\left(\frac{\sin k\pi}{\cos k\pi} \right) \cdot \left(\frac{\sin k\pi}{\cos k\pi} \right)^{-1} = -\left(\frac{0}{\pm 1} \right) \cdot \left(\frac{0}{\pm 1} \right)^{-1} = -\frac{0}{1} \cdot \frac{1}{0} = -\frac{0}{0} = 0 \quad (11)$$

であって、(10)式の場合、

$$\begin{aligned} -\tan\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) \cdot \left\{\tan\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)\right\}^{-1} &= -\left\{\frac{\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)}\right\} \cdot \left\{\frac{\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)}\right\}^{-1} \\ &= -\left(\frac{\pm 1}{0}\right) \cdot \left(\frac{\pm 1}{0}\right)^{-1} = -\frac{1}{0} \cdot \frac{0}{1} = -\frac{0}{0} = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $0/0=0$ はゼロ除算の基本定理による。従って、挟角 α が(8)式を満たすならば、

$$a \cdot a' = -\tan \alpha \cdot (\tan \alpha)^{-1} = -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^{-1} = 0 \quad (13)$$

が成り立つ。つまり、(7)式と(13)式を合わせることで、

$$a \cdot a' = -\tan \alpha \cdot (\tan \alpha)^{-1} = -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^{-1} = \begin{cases} 0 & \alpha = \left\{k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ -1 & \alpha \neq \left\{k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases} \quad (14)$$

を得る。他方、(7)式と(13)式から、

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^{-1} &= -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^{1-1} = -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^0 = -\tan^0 \alpha \\ \therefore -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^0 &= -\tan^0 \alpha = \begin{cases} 0 & \alpha = \left\{k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ -1 & \alpha \neq \left\{k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、 $\alpha=\pi/2$ とすると、

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\sin \pi/2}{\cos \pi/2}\right) \cdot \left(\frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2}\right) &= -\frac{1}{0} \cdot \frac{0}{1} = -\frac{1 \cdot 0}{0 \cdot 1} = -\frac{0}{0} = -0 \\ &= -\tan^0 \pi/2 = -0^0 \\ \therefore 0^0 &= \frac{0}{0} = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

の関係式を得る。

ところで、二直線 $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ が作る角を θ とすれば、

$$\tan \theta = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \cdot \tan \alpha} \quad (17)$$

と表される。二直線が直交しているので、 $\theta=\pi/2$ である。従って、挟角 α が、

$$\alpha \neq \left\{k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

のとき、(4)式と(7)式から、

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \cdot \tan \alpha} = -\frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{1 - 1} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{0} = 0 \quad (18)$$

であって、挟角 α が、

$$\alpha = \left\{ k\pi \vee \frac{2k-1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

のとき、(4)式と(14)式から、

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \cdot \tan \alpha} = -\frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{1 + 0} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad (19)$$

を得る。ただし、 $1/0=0$ はゼロ除算による。

以上より、互いに直交する二直線は直交座標系の取り方によらず、互いの間での傾きは 0 であると言える。面白いことに、二直線が互いに平行、即ち、 $\theta=0$ 、 $\alpha=\alpha'$ の場合、(17)は、

$$\tan \theta = \tan 0 = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{0}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (20)$$

であって、 $\alpha \neq \pi/2$ のとき、(20)式は明らかに、0 である。他方、 $\alpha = \pi/2$ のとき、(20)式は、

$$\tan 0 = \frac{0}{1 + \tan^2 \pi/2} = \frac{0}{1 + 0^2} = \frac{0}{1} = 0 \quad (21)$$

となって、やはり、0 であるから、互いに平行する二直線においては、全ての挟角 α に対して互いの傾きは 0 であって、互いに直交する二直線の傾きと等しいと言える。

以上のことは、或る直線 L に対して別の直線 L' が、挟角 θ で傾斜しているとき、 $\theta=0$ ならば、二直線の間の傾き a は 0 であり、また、 $\theta=\pi/2 \Rightarrow a=0$ であって、 $\theta=\pi \Rightarrow a=0$ であって、 $\theta=3\pi/2 \Rightarrow a=0$ であって、 $\theta=2\pi \Rightarrow a=0$ であることを示している。

つまり、直交座標系は、 $0 \leq \theta < \pi/2$ (第一象限)、 $\pi/2 \leq \theta < \pi$ (第二象限)、 $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ (第三象限)、 $3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$ (第四象限) というように、基準となる座標軸から $\pi/2$ 毎 (象限毎) の半開角度区間のユニットになっていて、隣り合う象限間のつなぎ目は、座標軸の傾きとしては強力な不連続性を以て接続されていることを示している。

つまり、第一象限を例とすると、 $0 \leq \theta < \pi/2 \Rightarrow 0 \leq a < \infty$ 、特に、 $\theta \rightarrow \pi/2 \Rightarrow a \rightarrow \infty$ 、 $\theta = \pi/2 \Rightarrow a = 0$ となる。最後の関係は、対象としている範囲が、1つ手前のユニット (第一象限) から見て次のユニット (第二象限) の範囲に遷移していることを示している。

以下に、 xy 直交座標における第 1 象限から第 4 象限までの 4 つの象限を、象限毎に分解 (以下、象限分解という。) し、直交座標系の構造を Fig.1 に示す。Fig.1 に示すように、軸の傾きの範囲、即ち、軸挟角の範囲は、象限毎に挟角が小さな側は閉角 (閉点に対応する概念) であるのに対して、挟角が大きい側は開角 (開点に対応する概念) となっていて、象限の挟角範囲は、半開角になっていることが解る。

次に、象限分解した xy 直交座標を、第 1 象限から第 4 象限から成る元の xy 直交座標のように象限合成して、各象限の領域内に、その象限における挟角範囲の最小値と極大値に対応する軸傾の関係を Fig.2 に示した。なお、Fig.2 に記した $\check{0}$ は、0 より小さく、どんな負定数より大きい極限小を意味する。

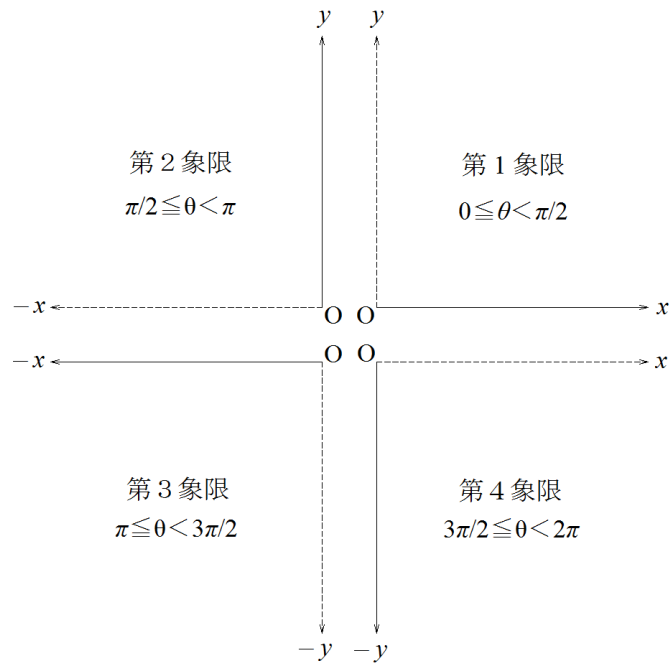


Fig.1 4象限分解した xy 直交座標の構造と範囲

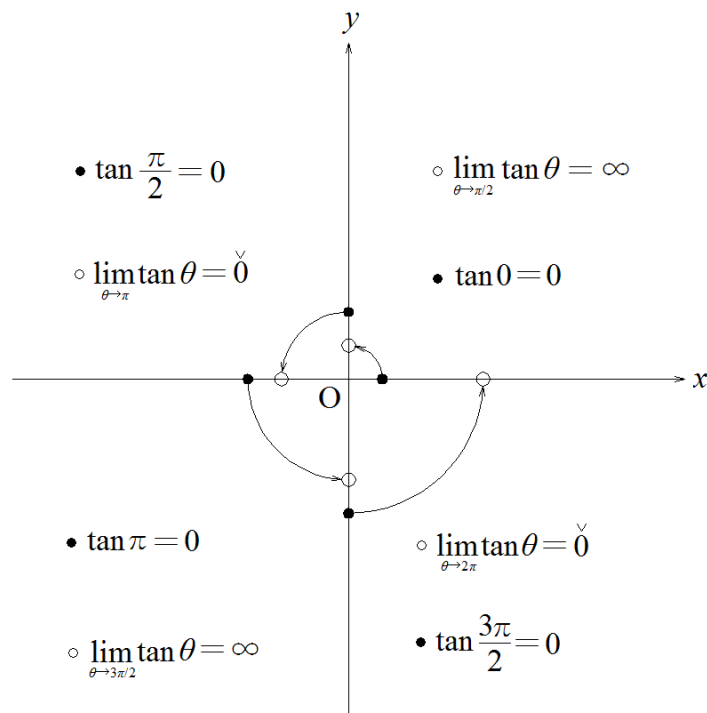


Fig.2 4象限合成による xy 直交座標と軸傾の関係